



Universidad Católica del Norte  
Departamento de Física

# DAFI-02255

# Introducción a la Física de Partículas

Roberto Lineros

Segundo Semestre 2020

<https://robertolinos.com/teaching/fisica-de-particulas/>

# Modalidad Online

- 3 clases por Zoom a la semana duración en torno a 1 hora.
- Después de cada clase habrá un tiempo para de consultas.
- Evaluaciones durante el bloque de clases.



[https://us02web.zoom.us/meeting/register/tZYscuivrjgsHdKkjuMJL\\_QAnz1AXP3hYbQR](https://us02web.zoom.us/meeting/register/tZYscuivrjgsHdKkjuMJL_QAnz1AXP3hYbQR)

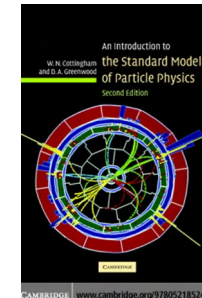
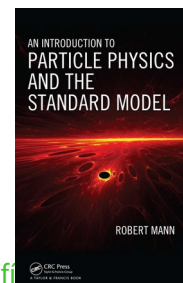
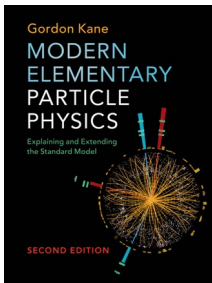
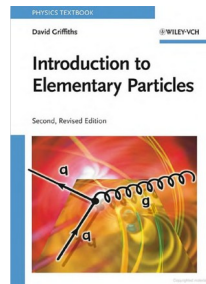
Número reunión: 821 5170 3676

# Comunicación, material de clases

campusvirtual.ucn.cl  
roberto.lineros@ucn.cl

# Bibliografía

- David Griffiths. Introduction to Elementary Particles.
- W. N. Cottingham, and D. A. Greenwood.  
An Introduction to the Standard Model of Particle Physics.
- Robert Mann. An Introduction to Particle Physics and the Standard Model.
- Gordon Kane.  
Modern Elementary Particle Physics Explaining and Extending the Standard Model.



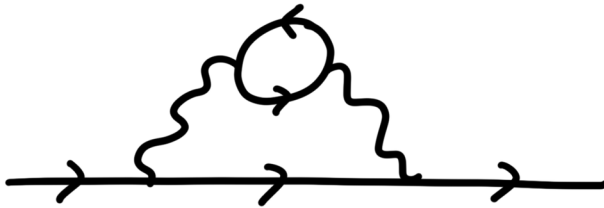
# Contenido del curso (I)



- La Materia y sus interacciones
- Relatividad. Lagrangianos. Electrodinámica.
- Campos escalares reales y complejos
- Teorema de Nöether y corrientes conservadas. Invariancia de Gauge



# Contenido del curso (II)



- Ecuación de Dirac. Espinores.
- Grupos  $SO(3)$ ,  $SU(2)$ ,  $SL(2,C)$ , Lorentz
- Electrodinámica cuántica (QED)
- Teoría de perturbaciones, tasas de decaimientos y secciones eficaces.
- Reglas de Feynman

# Contenido del curso (III)



- Mecanismo de Higgs. Rompimiento espontáneo de simetrías globales y locales.
- Modelo Estándar: Quarks y Leptones. Términos de masa.
- Cromodinámica Cuántica (QCD)
- Simetrías de sabor

# Evaluaciones

- 2 Pruebas Regulares (**PR**), sobre contenido pasados hasta 1 semana antes de la prueba.
- 1 Exposición Oral (**EO**), sobre un tema a definir.
- 1 Prueba Final (**PF**), todo el contenido del curso.

$$NF = 50\%PR + 15\%EO + 35\%PF$$

# Fechas

Prueba Regular 1	19/Noviembre/2020
Prueba Regular 2	17/Diciembre/2020
Exposición Oral	6/Enero/2021
Prueba Final	15/Enero/2021

# Horario de clases

Bloque	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
B				Particulas	Particulas
C					
D			Particulas		
E					
F					

# Iniciamos Miércoles 30/Septiembre!





<https://robertolinos.com/teaching/fisica-de-particulas/>



Universidad Católica del Norte  
Departamento de Física

**DAFI-02255**

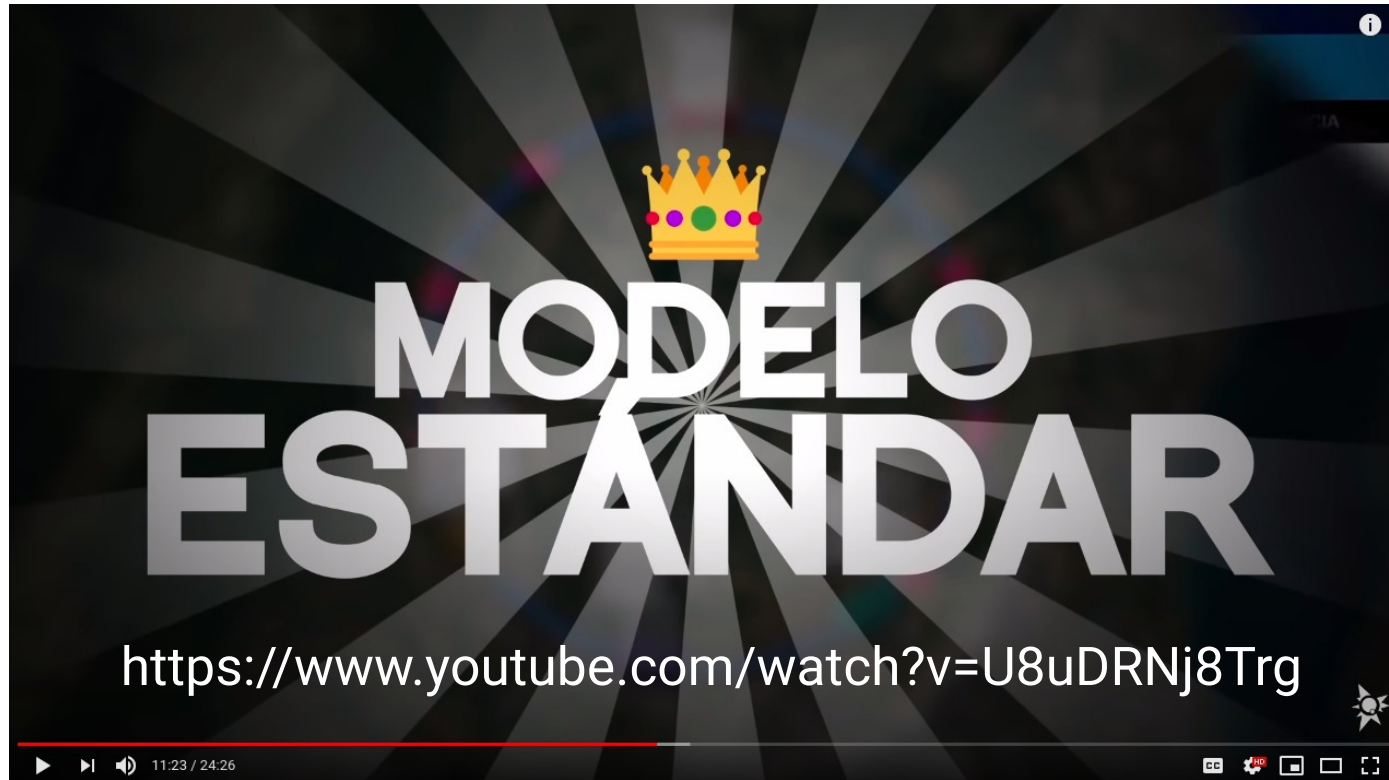
# Introducción a la Física de Partículas

**Roberto Lineros**

**Segundo Semestre 2020**

<https://robertolinerros.com/teaching/fisica-de-particulas/>

# Iniciamos!







**Daniel Whiteson**  
@DanielWhiteson

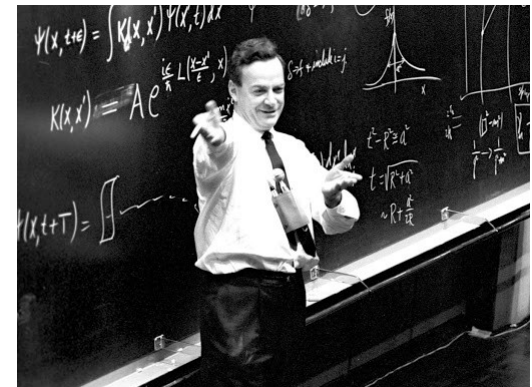
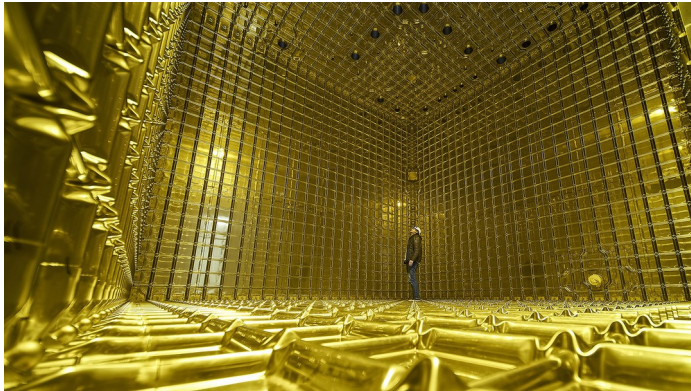
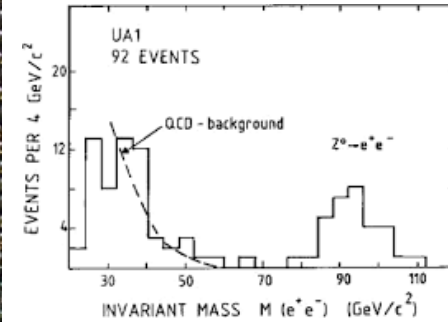
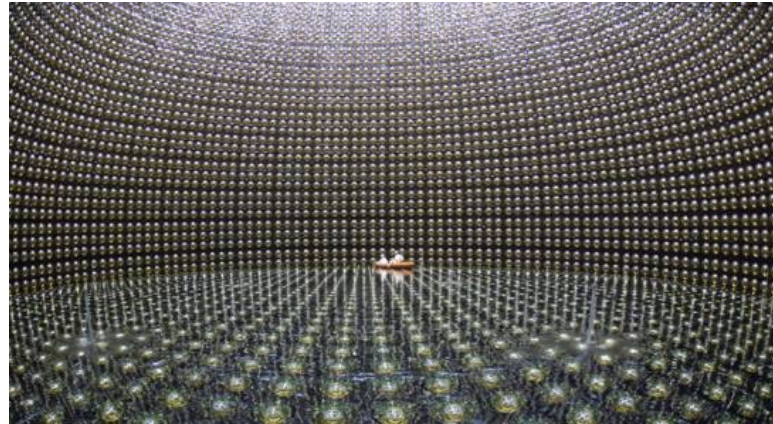
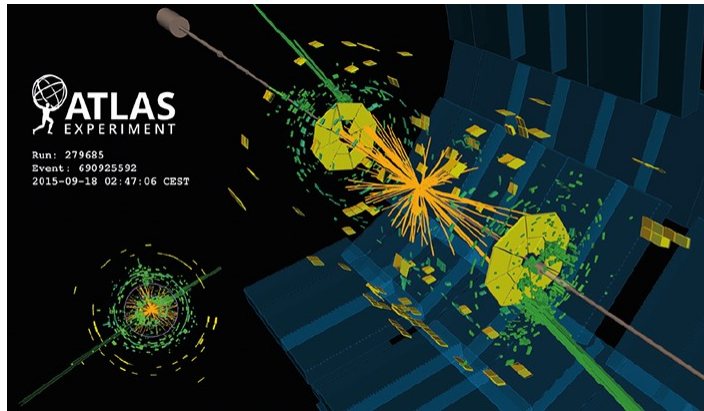


How it started

How it's going



# La física es una ciencia experimental!



# La materia y sus interacciones (I)

- Cuando se habla de materia se tiende a pensar en objetos que **existen** en un punto del espacio y que no cambian.
- Los objetos se afectan a través de **Fuerzas**

Básicamente pensamos en las 3 leyes de Newton.



$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$



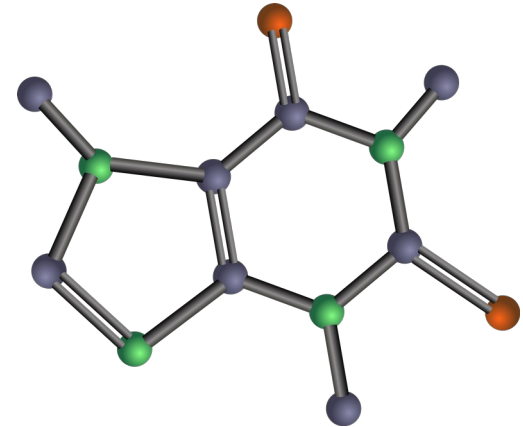
# La materia y sus interacciones (II)

- Dependiendo del nivel de detalle, podemos ir desde objetos macroscópicos “suaves” a cuánticos “discretos”



Café

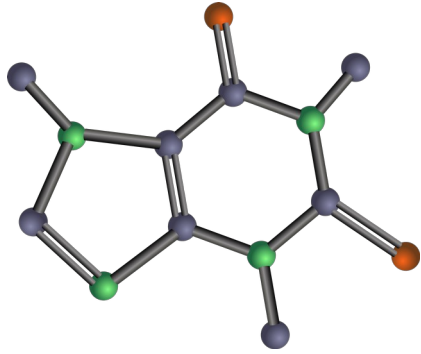
Mecánica clásica



Cafeína:  $\text{C}_8\text{H}_{10}\text{N}_4\text{O}_2$

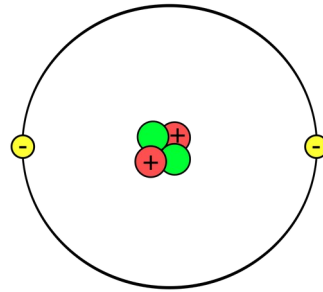
Química cuántica

# La materia y sus interacciones (III)



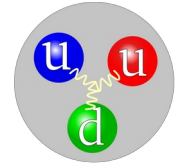
Angstroms  
 $\sim 10^{-10} \text{ m}$

Química cuántica  
Nanociencia



Radio de Bohr  
 $\sim 10^{-11} \text{ m}$   
$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$$

Mecánica cuántica  
Física Nuclear



Radio del protón  
 $\sim 10^{-15} \text{ m}$

Física de partículas  
Física Nuclear

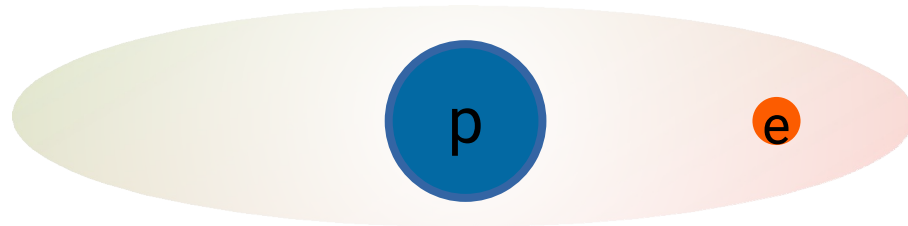
# La materia

La materia ordinaria se conforma por estados ligados.

En los estados ligados participan:

- Quarks: *up, down, strange, charm, top, bottom*
- Leptones: *electrón, muón, tau, neutrinos*

Pero estos estados ligados nacen debido al intercambio de **Bosones de Gauge**

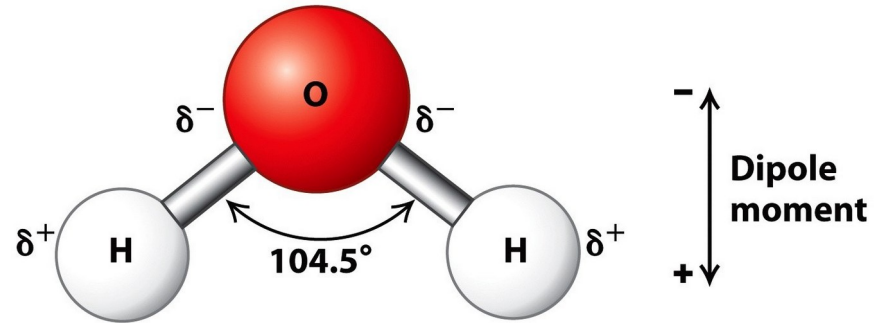


# Leptones

El electrón forma **estados ligados** con los núcleos atómicos.

Gracias a:

- La interacción electromagnética.
- Momento angular cuántico
- Principio de exclusión



# Leptones

Los leptones son 6. Interactúan Electromagnéticamente y Débilmente

$$Q = 0$$

$$Q = -e$$

1ª familia	2ª familia	3ª familia
Neutrino-electron $\nu_e$	Neutrino-muon $\nu_\mu$	Neutrino-Tau $\nu_\tau$
Electron $e$	Muon $\mu$	Tau $\tau$

# Hadrones

Los quarks forman **estados ligados** y forman a los **hadrones** (mesones y bariones)

## Gracias a:

- Interacción nuclear fuerte
- Interacción electromagnética
- Momento angular cuántico
- Reglas de selección
- Principio de exclusión

<https://pdg.lbl.gov/2020/reviews/rpp2020-rev-quark-model.pdf>

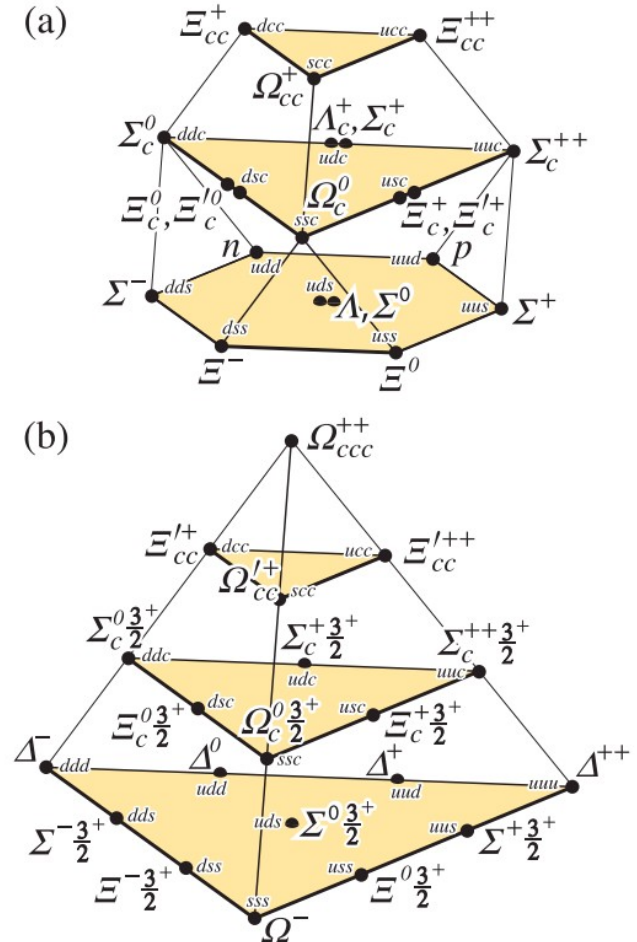


Figure 15.5: SU(4) multiplets of baryons made of  $u$ ,  $d$ ,  $s$ , and  $c$  quarks. (a) The spin 1/2 20-plet with an SU(3) octet. (b) The spin 3/2 20-plet with an SU(3) decuplet.



# Quarks

Son 6 (x3) quarks. Interaccionan Electromagnéticamente, Débilmente y Fuertemente

$$Q = \frac{2}{3}e$$

$$Q = -\frac{1}{3}e$$

1ª familia	2ª familia	3ª familia
Up <i>u</i>	Charm <i>c</i>	Top <i>t</i>
Down <i>d</i>	Strange <i>s</i>	Bottom <i>b</i>

# Las interacciones

Electromagnética

Fotón  $\gamma$

Interacción Débil

Bosones  $Z W^{\pm}$

Interacción Fuerte

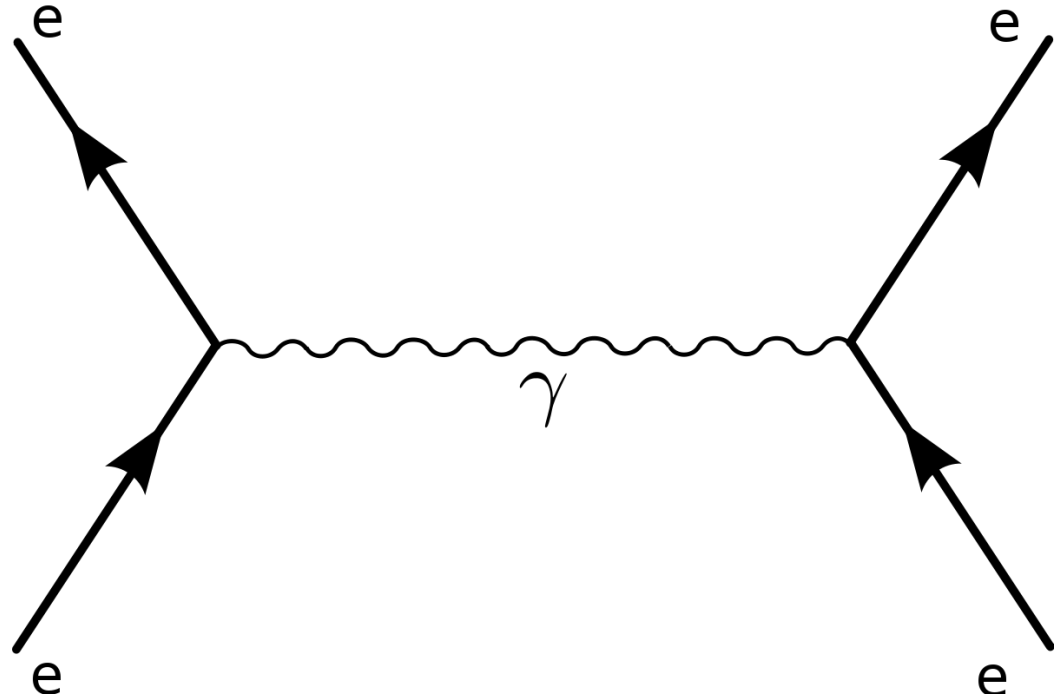
Gluón  $g$

Gravedad

Gravitón (hipotética)

# Los procesos

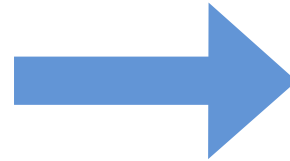
- Las partículas interactúan a través del intercambio de otras partículas
- Representación de un proceso mediante un **diagrama de Feynman**



# Unidades Naturales

Sistema de unidades que simplifica los cálculos en física de altas energías:

$$\begin{aligned}c &= 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} \\ \hbar &= 6.582 \times 10^{-22} \text{ MeV s} \\ k &= 8.617 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1} \\ \epsilon_0 &= 8.854 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}c &= 1 \\ \hbar &= 1 \\ k &= 1 \\ \epsilon_0 &= 1\end{aligned}$$

- Así energía ( $mc^2$ ), momentum ( $mc$ ), masa ( $m$ ) se expresan en unidades de energía: GeV, MeV, eV, etc.
- Temperatura en unidades de energía.
- Tiempo y distancia en unidades  $[\text{energía}]^{-1}$ :  $\text{GeV}^{-1}$ ,  $\text{MeV}^{-1}$ ,  $\text{eV}^{-1}$

# Unidades Naturales

Por ejemplo:

- Energía:  $1\text{GeV} = 1.602 \times 10^{-10}\text{J}$
- Masa:  $1\text{GeV} = 1.78285 \times 10^{-27}\text{kg}$
- Tiempo:  $1\text{GeV}^{-1} = 6.58212 \times 10^{-25}\text{s}$
- Distancia:  $1\text{GeV}^{-1} = 1.973 \times 10^{-16}\text{m} = 0.197\text{fm}$
- Temperatura:  $1\text{GeV} = 0.01161\text{K}$

# Una unidad para gobernarlas a todas!





# Ejercicios

- Escribir las fórmulas que permiten definir las conversiones entre unidades SI y las naturales
- ¿Qué unidades (naturales) tiene la carga eléctrica?

# Ecuación de Schrödinger en UN

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right] \Psi(x, t)$$

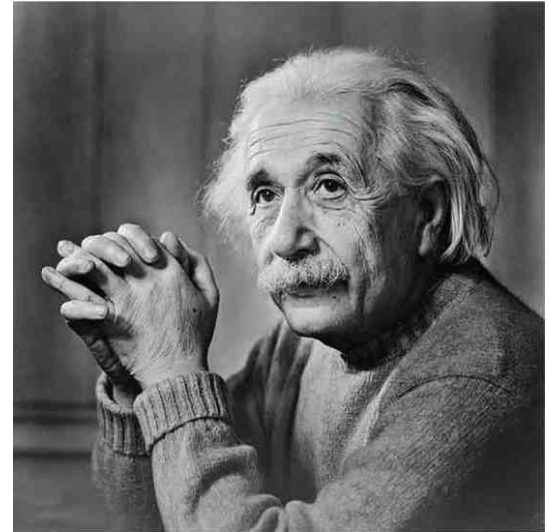


$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[ \frac{-1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right] \Psi(x, t)$$

# Relatividad

Los postulados básico de la relatividad especial son:

- 1) Las leyes físicas son igualmente válidas en todo sistema de referencia inercial
- 2) La velocidad de la luz ( $c$ ) es constante en todo sistema de referencia inercial



# Espacio y tiempo entre sistemas (I)

Tenemos 2 sistemas inerciales  $S$  y  $S'$ .  $S'$  se mueve con respecto a  $S$  con velocidad constante (**boost**):

$$\vec{v}_{S'/S} = v\hat{t}$$

Entonces la transformación entre sistemas:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

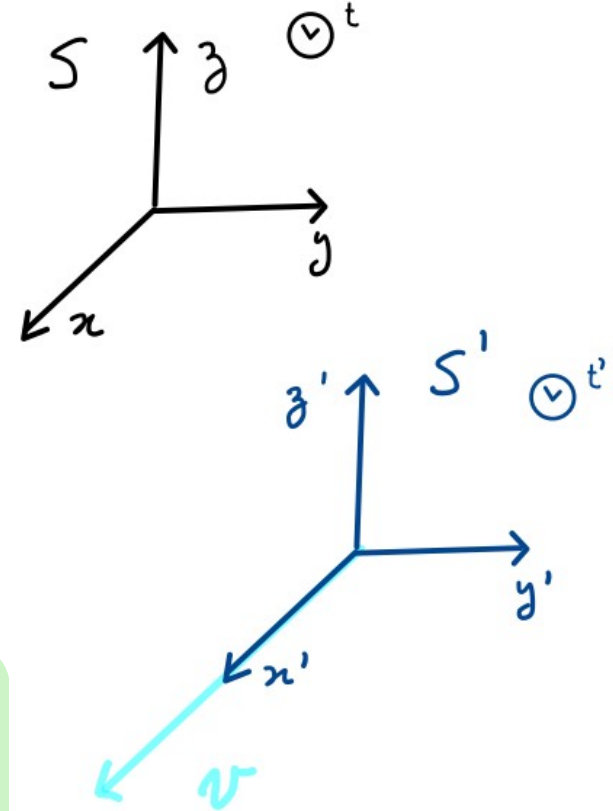
$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

$$\beta = v/c$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$



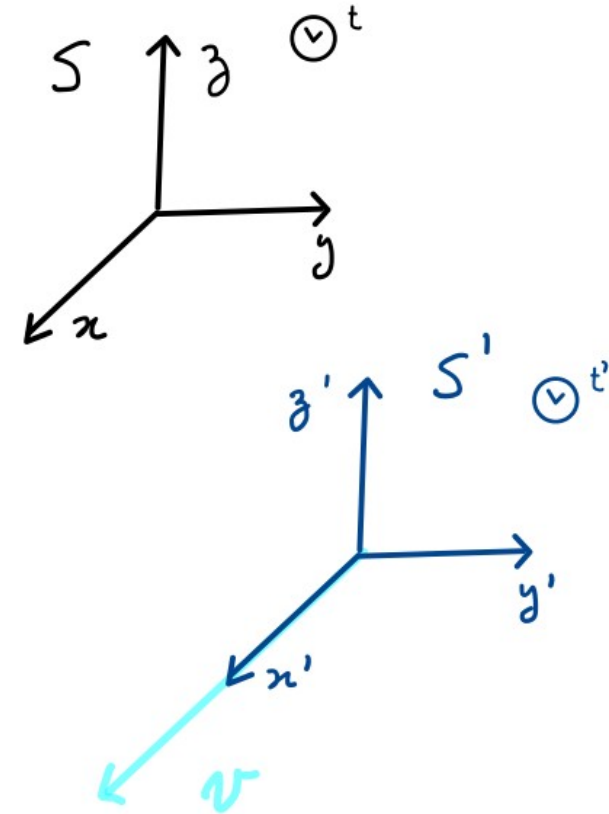
# Espacio y tiempo entre sistemas (II)

Aquí se observa que las únicas cantidades que se ven afectadas por el cambio de sistema de referencia son:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

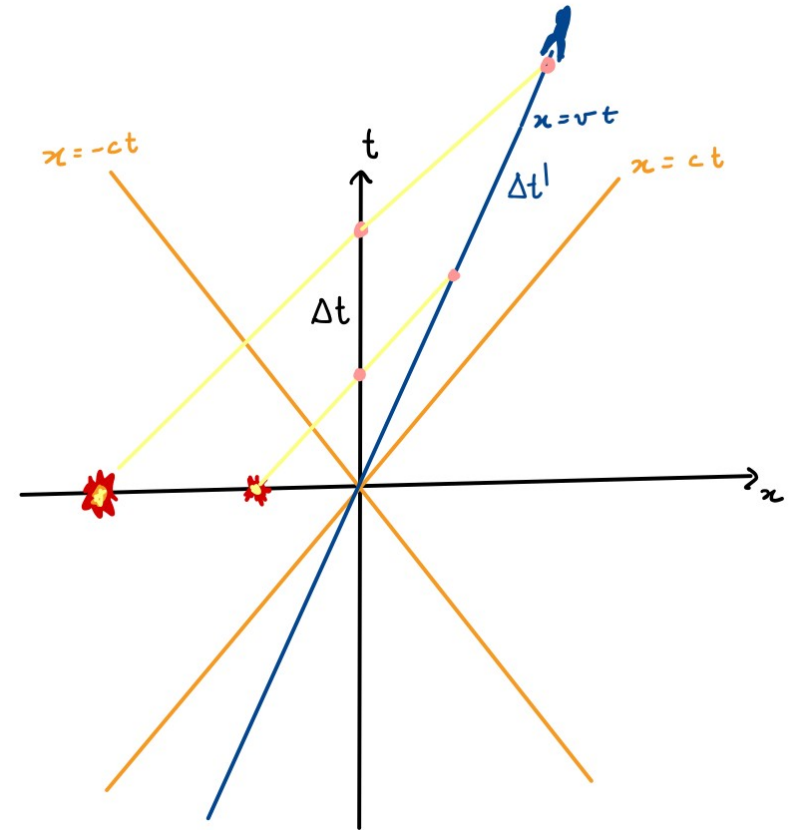
O sea, las coordenadas perpendiculares a la velocidad relativa **no** se ven afectadas



# Eventos

- Son **cosas** que ocurren en un punto del espacio-tiempo
- Los eventos ocurren en todos los marcos inerciales
- La distancia  $ds^2$  es igual en todos los sistemas inerciales

$$ds^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{x}^2$$



# Notación tensorial

Básicamente se trata de descomponer: vectores, matrices, y tensores indicando sus componentes con índices

$$\vec{A} = A_i \hat{e}_i \longrightarrow A_i$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i$$

$$(M \vec{A})_i = M_{ij} A_j$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_k = \epsilon_{ijk} A_i B_j$$

$$(\nabla f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

 Tensor Levi-Civita

# Notación relativista (I)

Las coordenadas espacio temporales se pueden escribir como un único objeto

Cuadrivector posición  $x^\mu = (t, \vec{x})$  (contra-variante)

$x_\mu = (t, -\vec{x})$  (co-variante)

Donde:

$$x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$$



# Notación relativista (II)

Los 4-vectores se relacionan a través de la métrica

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así } x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así } x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

Suma sobre índices repetidos

# Notación relativista (III)

Las contracciones entre cuadvectores

$$x_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} x^\nu x^\mu = t^2 - \vec{x} \cdot \vec{x}$$

$$a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

son invariantes de Lorentz

Esto es análogo al producto punto en 3 dimensiones

# Transformaciones de Lorentz (I)

La transformación entre los sistemas S y S' (visto anteriormente) se puede escribir a través de una **transformación de Lorentz**

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\beta = \tanh \theta$

Así un 4vector contravariante en S se transforma a un en S':

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

# Transformaciones de Lorentz (II)

La **invariancia de Lorentz** implica que

$$x'_{\mu} x'^{\mu} = x_{\mu} x^{\mu}$$

Por lo tanto, las transformaciones de Lorentz deben cumplir:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta}$$

# Transformaciones de Lorentz (III)

La transformación inversa, es decir, de  $S'$  a  $S$  corresponde a:

$$x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x'^\nu$$

Al componer las transformaciones se cumple:

$$\Lambda^\mu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$$

Delta de Kronecker

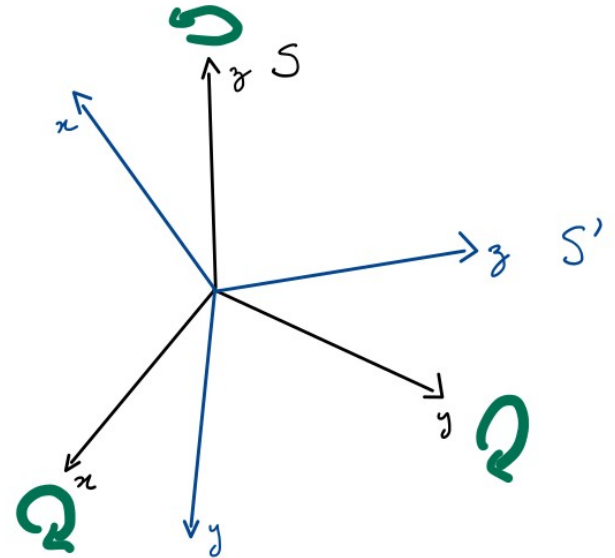
$$\delta^\mu{}_\nu = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$

# Transformaciones de Lorentz (IV)

La transformación entre sistemas inerciales puede ser simplemente una rotación entre coordenadas.

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Rotación en el plano xy



# Ejercicios

- Encontrar la relación que existe entre la transformada de Lorentz y su inversa.  
Es decir:

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu} = F(\Lambda^{\mu}_{\nu})$$

- Escribir la transformación de Lorentz de un 4vector covariante

$$x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu}$$

# Estructura del espacio-tiempo

El universo (o colección de eventos) accesible a un observador va a estar clasificado por:

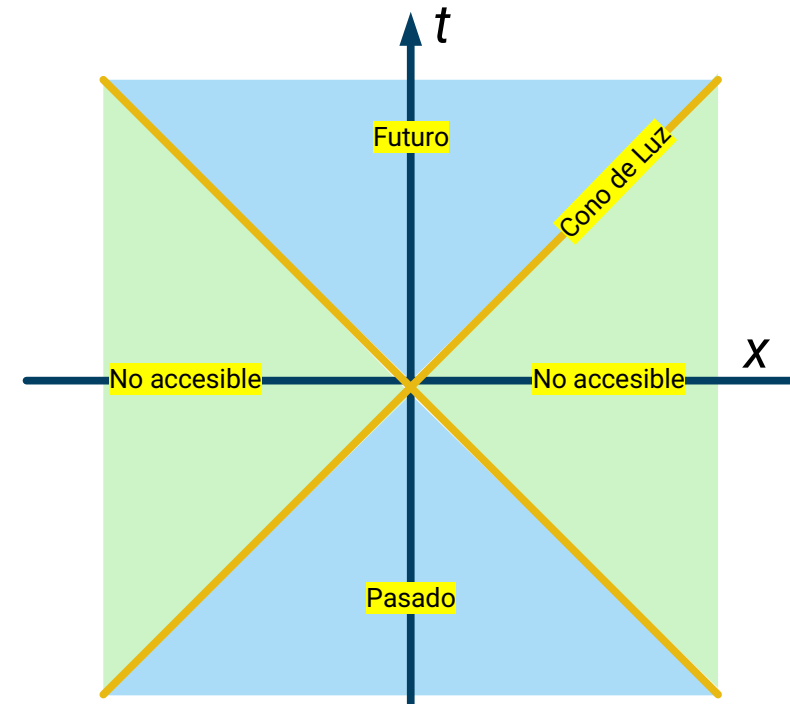
$$x_\mu x^\mu = x^2$$

Evento en  $x^\mu$

$x^2 > 0$       Evento tipo tiempo

$x^2 = 0$       Evento tipo luz

$x^2 < 0$       Evento tipo espacio





# Inversión temporal y espacial

Existen otras transformaciones (discretas) que no alteran las contracciones:

$$x_\mu x^\mu = x^2 = t^2 - \vec{x}^2$$

- Inversión temporal (T):  $x'^\mu = T(x^\mu) = (-t, \vec{x})$

- Inversión espacial (Paridad):  $x'^\mu = P(x^\mu) = (t, -\vec{x})$

# Cinemática relativista (I)

Una partícula en  $x^\mu$  siempre va a estar en movimiento ya que el tiempo no se detiene.

Se define la 4-velocidad como:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Donde  $\tau$  es el tiempo propio de la partícula (el reloj que se encuentra en reposo con la partícula)

$$ds^2 = c^2 d\tau^2$$

# Cinemática relativista (II)

El 4-momentum de la partícula viene dado por:

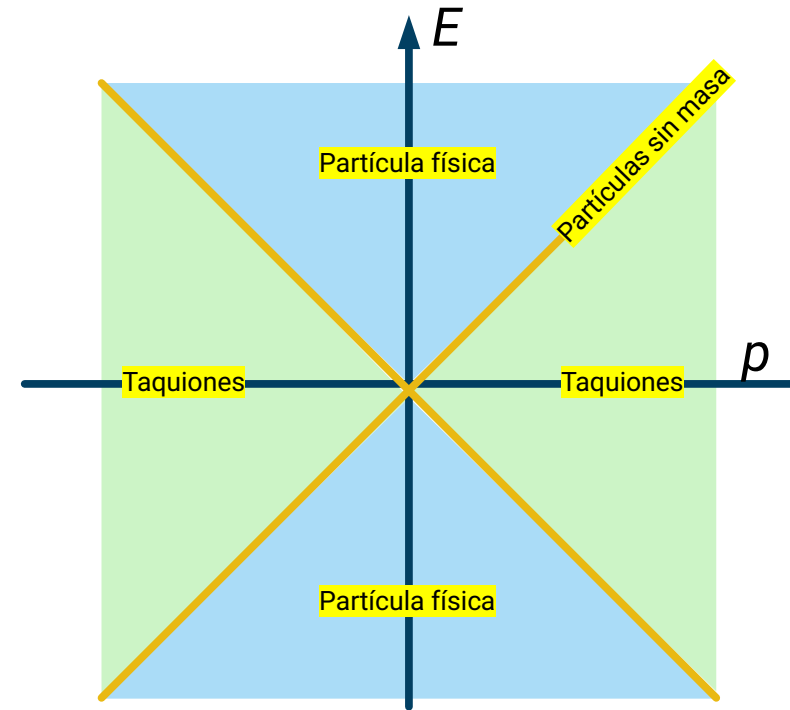
$$p^\mu = mu^\mu$$

Y es equivalente a:  $p^\mu = (E, \vec{p})$

Lo genial es que  $p_\mu p^\mu$  es invariante de Lorentz

y vale:

$$p^\mu p_\mu = m^2 \longrightarrow E^2 - \vec{p}^2 = m^2$$



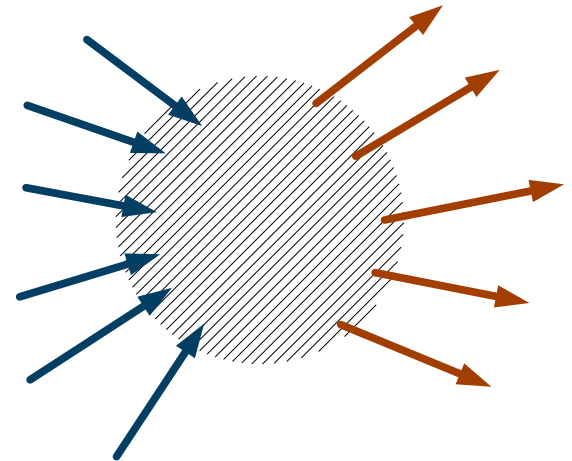
# Energía y momentum

Las transformaciones de Lorentz y sus simetrías nos indican que la conservación de la **Energía** y del **Momentum** es:

## Conservación del 4-momentum

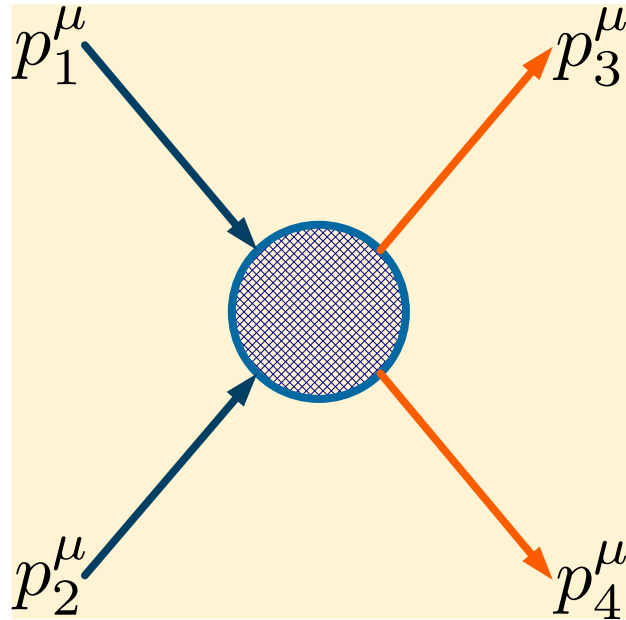
$$P_{\text{in}}^{\mu} = \sum_i^M p_{\text{in},i}^{\mu} \quad P_{\text{out}}^{\mu} = \sum_i^N p_{\text{out},i}^{\mu}$$

$$P_{\text{in}}^{\mu} = P_{\text{out}}^{\mu}$$

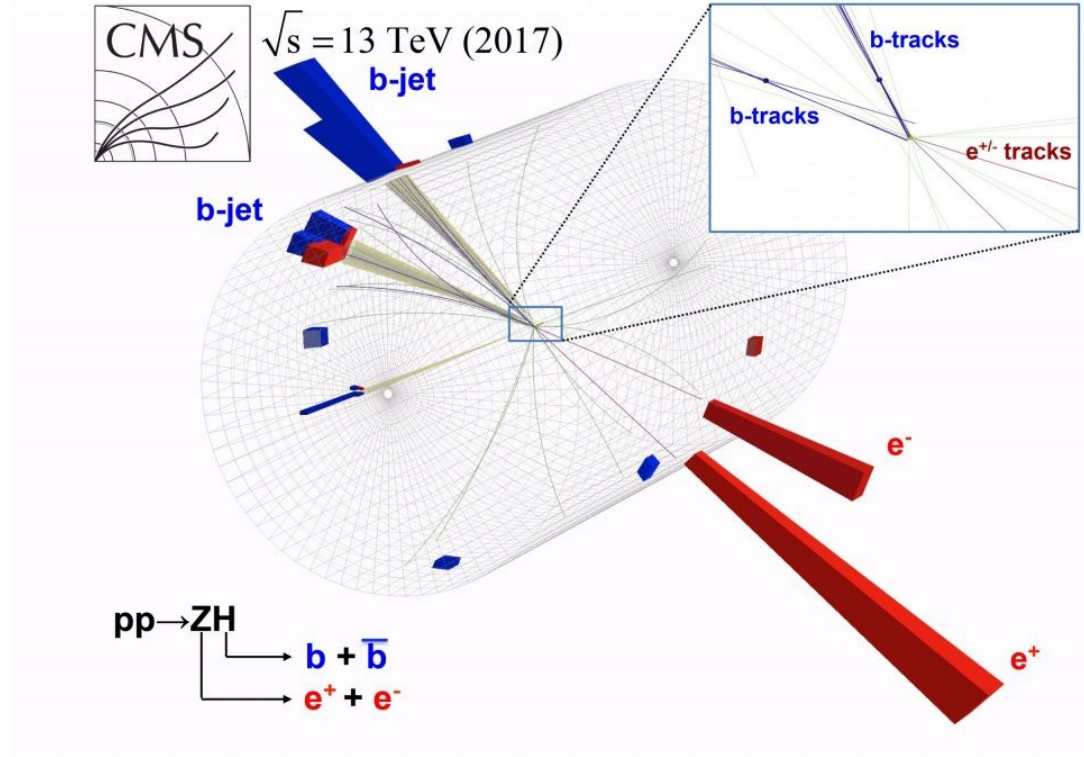


# Colisiones 2→2 (I)

Es el tipo de colisiones más simple.



2 entran; 2 salen



# Colisiones 2→2 (II)

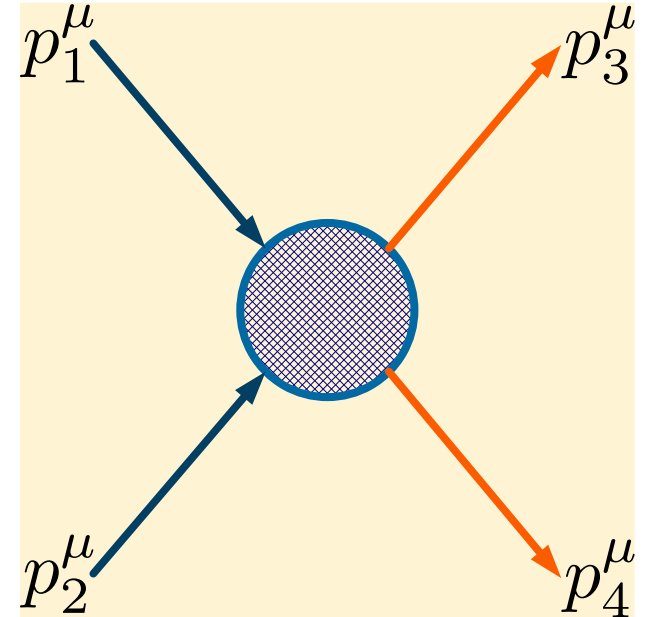
- La cinemática de la colisión **NO** es invariante de Lorentz.
- Existen contracciones que son **SI** lo son. Nos va a ser útiles más adelante.

## Variables de Mandelstam

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2$$



# Ejercicio

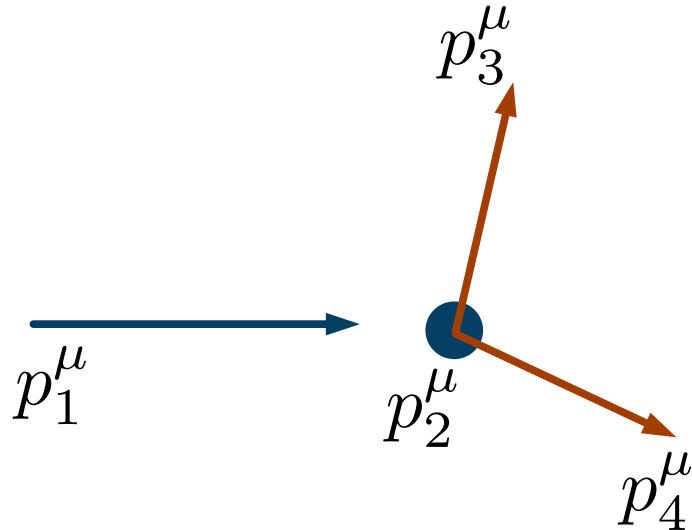
- Mostrar que:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$$



# Marcos de referencia: Lab's frame (I)

Se encuentra en reposo con respecto al objetivo a estudiar (Target)



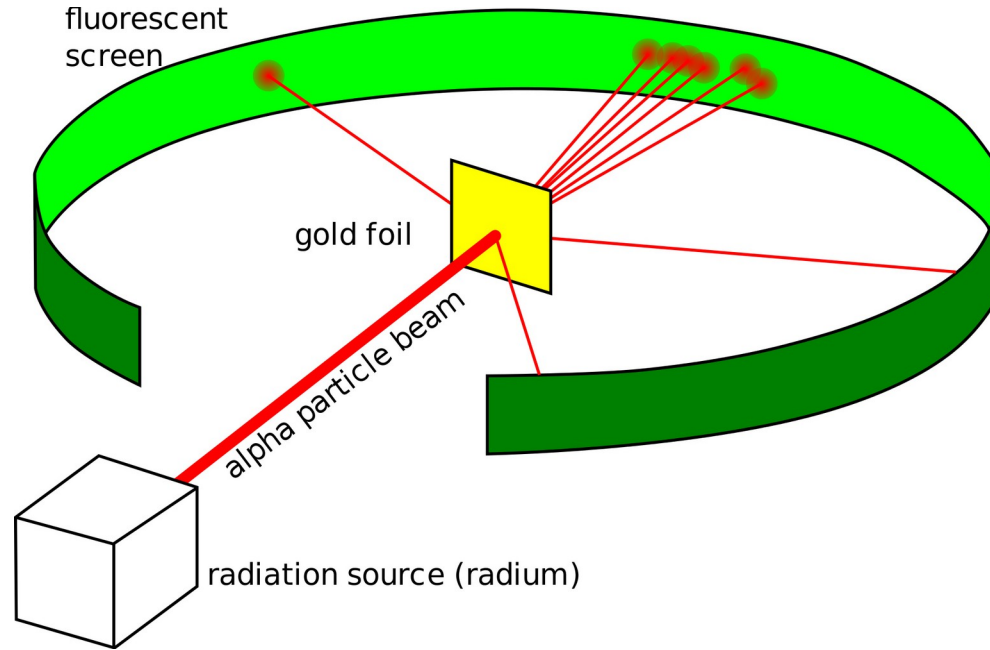
$$p_1 = (E_1, \vec{p}_1)$$

$$p_2 = (m_2, \vec{0})$$

$$p_3 = (E_3, \vec{p}_3)$$

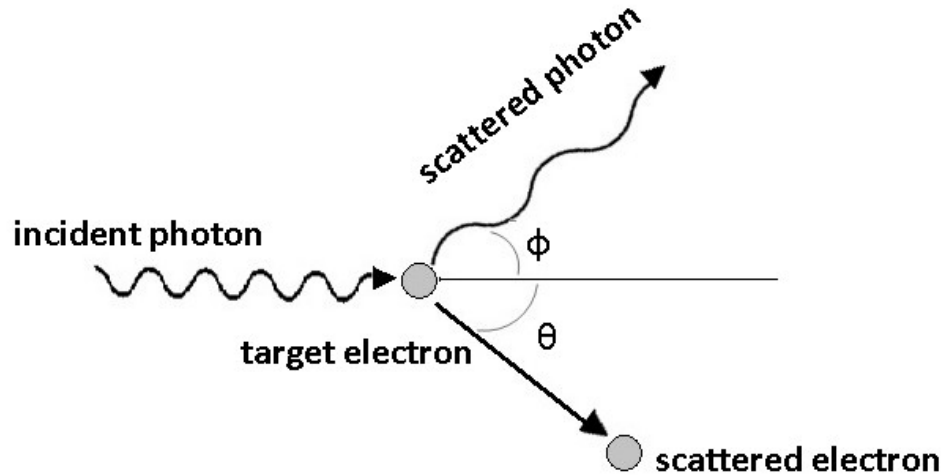
$$p_4 = (E_4, \vec{p}_4)$$

# Marcos de referencia: Lab's frame (II)



El experimento de Ernest Rutherford (1911) para observar la estructura atómica es un experimento en este marco.

# Marcos de referencia: Lab's frame (III)



$$p_1 = E_\gamma(1, \hat{k})$$

$$p_2 = (m_e, \vec{0})$$

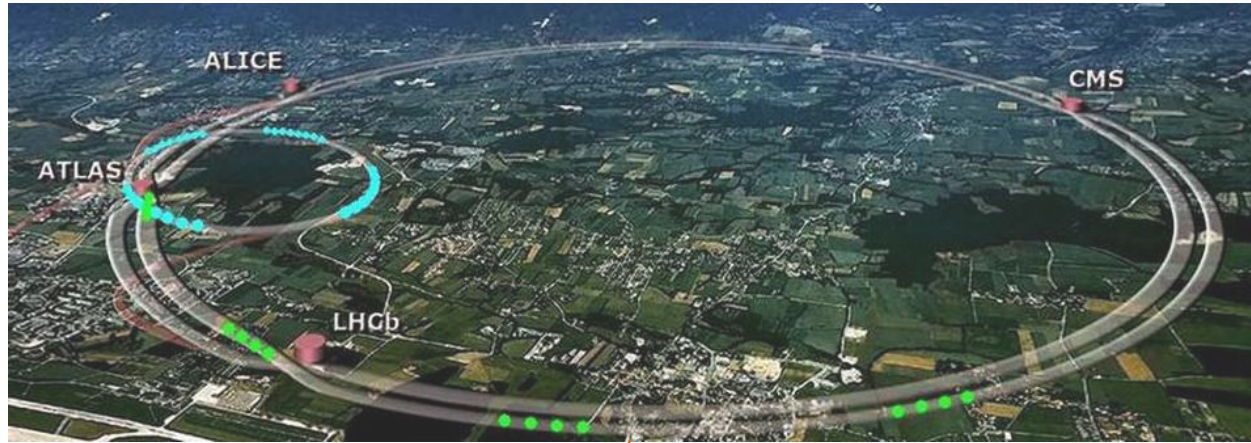
$$p_3 = E_{\gamma'}(1, \sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{k})$$

$$p_4 = (E_e, p_e(-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{k}))$$

El scattering de Compton también es el ejemplo del *Lab's frame*

# Marcos de referencia: Centro de Momenta (I)

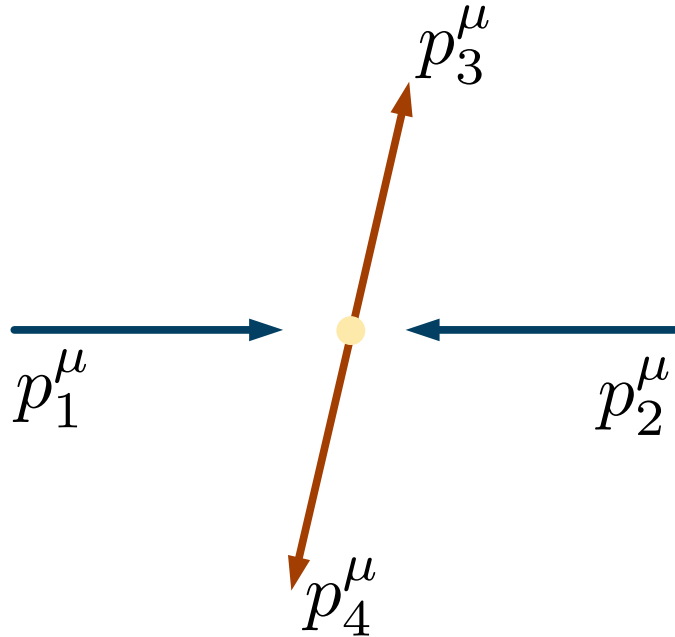
Es el marco de referencia de los colisionadores modernos: LHC, LEP, TeVatron.



# Marcos de referencia: Centro de Momenta (II)

Es el marco de referencia donde el momentum lineal total inicial es nulo:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$$



$$p_1 = (E_1, \vec{p})$$

$$p_2 = (E_2, -\vec{p})$$

$$p_3 = (E_3, \vec{q})$$

$$p_4 = (E_4, -\vec{q})$$

# Marcos de referencia: Centro de Momenta (III)

Este marco de referencia es especial ya que:

$$\sqrt{s} = E_1 + E_2$$

Energía de centro de masa

$$\vec{q} = p(\sin \theta \hat{p}_{1\perp} + \cos \theta \hat{p}_1)$$

Momentum de salida

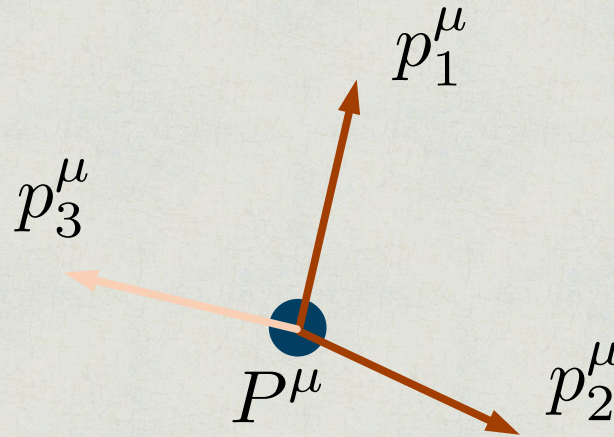
Además:

$$E_3 = \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}}$$

$$E_4 = \frac{s + m_4^2 - m_3^2}{2\sqrt{s}}$$

# Ejercicios

- Analizar el caso de una partícula que se desintegra en 2.
- Analizar el caso de una partícula que se desintegra en 3.



# Campos (I)

La física de partículas se basa en la **teoría de campos**, también el electromagnetismo, la mecánica cuántica, etc.

$$\phi(x^\mu)$$

Escalar

$$A^\mu(x^\mu)$$

Vector

$$T^{\mu\nu}(x^\mu)$$

Tensor

$$\psi_{L,R}(x^\mu)$$

Espinor

De manera muy simplista: *Un campo es una función que adquiere valores dependiendo del punto del espacio-tiempo donde se evalué.*



## Campos (II)

Un campo escalar nos entrega un **número real** en cada punto del espacio-tiempo.

$$\phi(x^\mu) \xrightarrow{\Lambda^\mu_\nu} \phi'(x^\mu)$$

El valor del campo no va a cambiar entre marcos de referencia

$$\phi'(x^\mu) = \phi((\Lambda^{-1})^\mu_\nu x^\nu)$$

Así necesita transformar para mantener esa condición

## Campos (II)

Un campo vectorial nos entrega un **4-vector** en cada punto del espacio-tiempo.

$$V^\mu(x^\mu) \xrightarrow{\Lambda^\mu_\nu} V'^\mu(x^\mu)$$

El valor del campo va a transformar como 4-vector entre marcos de referencia

$$V'^\mu(x^\mu) = \Lambda^\mu_\alpha V^\alpha((\Lambda^{-1})^\mu_\nu x^\nu)$$

Tensores, espinores y otras estructuras van a tener  
similares transformaciones (ante Lorentz)

# Campos dinámicos (I)

Estos objetos van a ser dinámicos:

- Evolucionan en el espacio-tiempo
- Interactúan con otros campos



La variación espacial de un campo escalar:

$$\phi(x^\mu + dx^\mu) \rightarrow \phi(x^\mu) + d\phi(x^\mu) \quad \longrightarrow \quad d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

# Campos dinámicos (II)

Analicemos este objeto:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

Invariante

contravariante

covariante

# Campos dinámicos (III)

La derivada es un 4-vector **co-variante**

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}, \nabla \phi \right) = \partial_\mu \phi$$

Y su versión **contra-variante**

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}, -\nabla \phi \right) = \partial^\mu \phi$$

# Campos dinámicos (IV)

Podemos construir objetos **invariante de Lorentz** usando las derivadas

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi$$



Se parece a la ecuación de una onda!



Jean-Baptiste le Rond d'Alembert

# Campos dinámicos (V)

Si aplicamos la derivada a un campo vectorial:  $V^\mu = (V^0, \vec{V})$

$$\partial_\mu V^\mu = \frac{\partial V^0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{V}$$



Se parece a una ecuación de continuidad



Emmy Noether

# Ejercicio

Aplicar las derivadas sobre el campo escalar

$$\partial^\mu \phi \quad , \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi$$

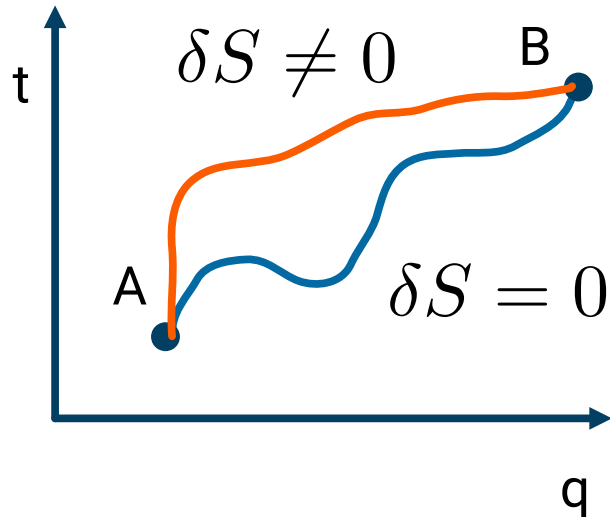
Cuando:

$$\phi(x^\mu) \propto \tilde{\phi}(p^\mu) e^{-ip_\mu x^\mu}$$



# Lagrangianos clásicos (I)

El **principio de Hamilton** nos dice que la trayectoria que recorre un objeto mantiene su **acción** invariante.



$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}) dt$$

$$L = T - V$$

# Lagrangianos clásicos (II)

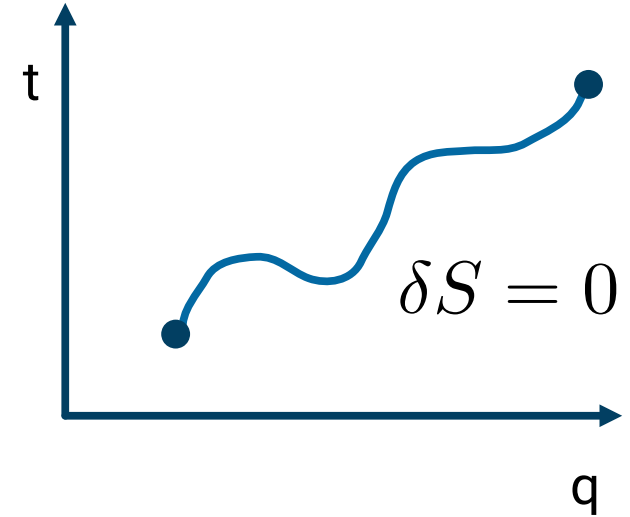
La variación de la acción entre coordenadas cercanas produce:

$$\delta S = \int \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt$$



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange



Leonhard Euler



Giuseppe Luigi  
Lagrangia

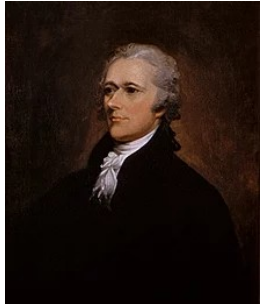
# Lagrangianos clásicos (III)

El uso de coordenadas generalizadas nos permite definir los momentos canónicos

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

Que nos permite relacionarlo con el **Hamiltoniano** y la **energía**

$$H(p, q) = p\dot{q} - L = E$$

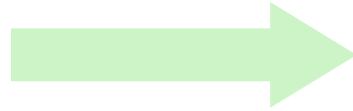


Alexander Hamilton

# Lagrangianos clásicos (IV)

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son las ecuaciones de movimiento en coordenadas generalizadas.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$$

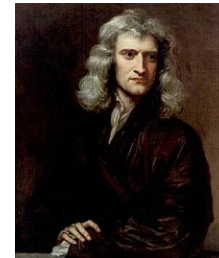


$$m\ddot{x} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange



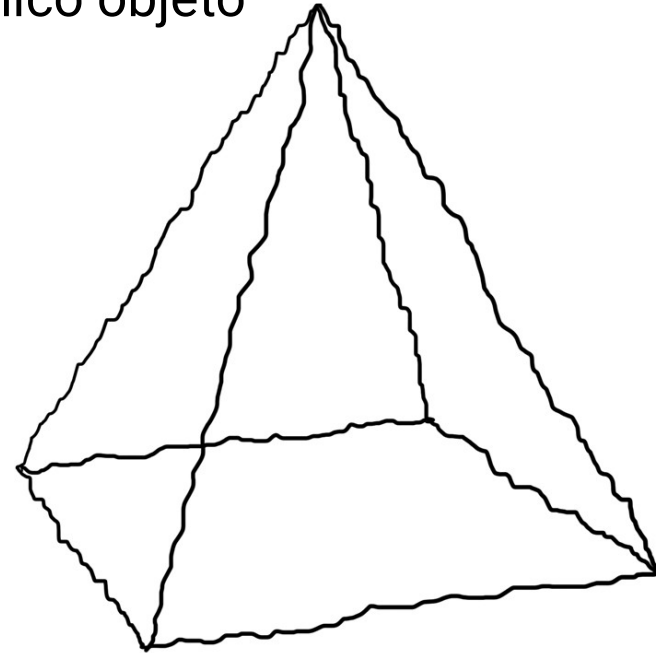
Isaac Newton

# Sistemas continuos (I)

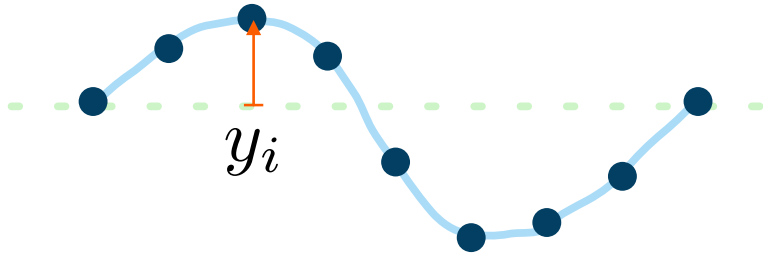
Cuando los objetos están compuestos por una distribución, hay que considerar que el **Lagrangiano** no es solo un único objeto

$$L = T - V = \int \mathcal{L} dx$$

Donde  $\mathcal{L}$  es la **densidad Lagrangiana**

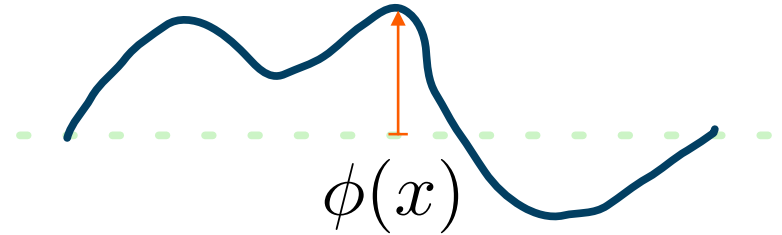


# Sistemas continuos (II)



$$L = \sum_i \frac{m_i \dot{y}_i^2}{2} - V(y_i)$$

Lagrangiano de set de objetos

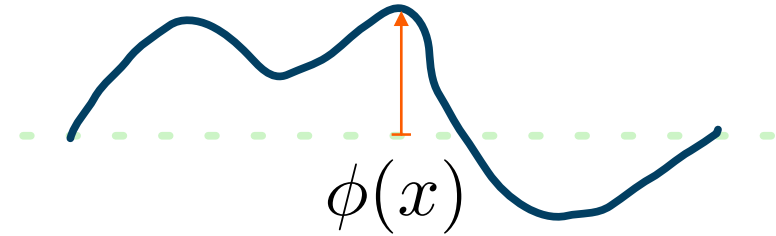


$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \mathcal{V}(\phi)$$

Densidad Lagrangiana  
una distribución objetos

# Sistemas continuos (III)

En el caso de una cuerda con tensión:



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2}T \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2$$

En general, la densidad va a ser una función:

$$\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \phi')$$

# Euler-Lagrange continuo (I)

La acción va ser la integral en espacio y tiempo de la densidad

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{L}(\dot{\phi}, \phi') dt dx$$

Al igual que antes:

$$\delta S = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} \right) = 0$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange para el continuo



# Euler-Lagrange continuo (II)

Usando el lagrangiano de la cuerda:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}T\phi'^2$$

Y calculando las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

Ecuación de onda

donde  $c = \sqrt{T/\rho}$



# Euler-Lagrange continuo (II)

De forma similar al caso discreto, la **densidad de momentum**:

$$\Pi(\dot{\phi}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

Así podemos definir la **densidad Hamiltoniana**:

$$\mathcal{H} = \Pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$$

(y la energía)

# Formulación covariante (I)

En el **espacio de Minkowski**, la acción es la integral del lagrangiano sobre el espacio-tiempo:

$$S = \int \mathcal{L} d^4x$$

El diferencial de volumen  $d^4x$  es invariante de Lorentz. Por lo tanto:

Si  $\mathcal{L}$  es **invariante**, entonces  $S$  también **lo es**.

# Formulación covariante (II)

El lagrangiano de un campo escalar va a ser una función:

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

El principio de Hamilton  $\delta S = 0$  nos conduce a la versión **covariante** de las ecuaciones de **Euler-Lagrange**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

# Formulación covariante (III)

También se puede definir el momento canónico generalizado (?):

$$\mathcal{P}^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)}$$

Y el hamiltoniano(?):

$$\mathcal{H} = \mathcal{P}^\mu \partial_\mu \phi - \mathcal{L}$$

¿Y la energía?

# Ejercicios

- Encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange covariante usando el principio de Hamilton.
- Aplique las ecuaciones de Euler-Lagrange al siguiente lagrangiano.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi) (\partial_\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2$$

# Tensor de Energía-Momento (I)

Como hemos visto, la conservación de la energía y el momento es esencial para poder caracterizar sistemas físicos.

En el contexto covariante (Minkowski), la energía y el momentum se relacionan con de traslaciones *rígidas* en el espacio tiempo.

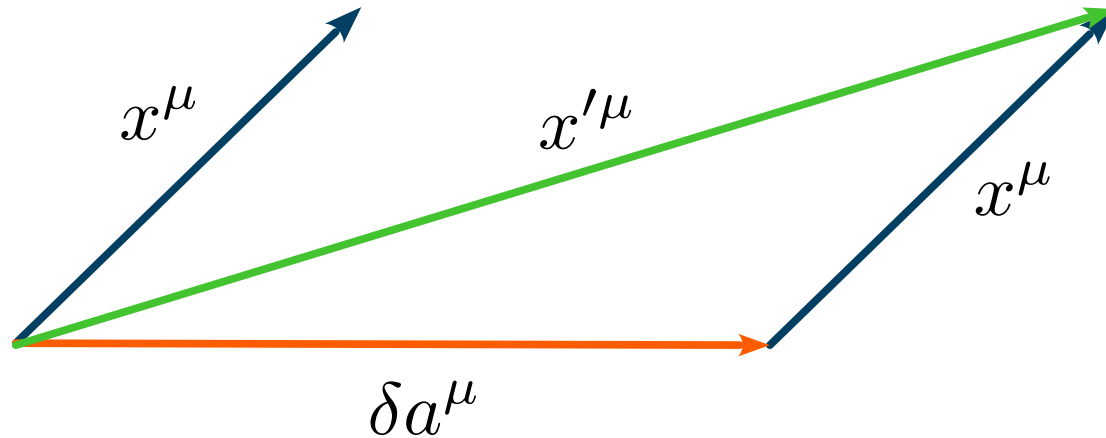
$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta a^\mu$$



Hermann Minkowski

# Tensor de Energía-Momento (II)

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta a^\mu$$



Vamos a trasladar de manera rígida el espacio-tiempo



# Tensor de Energía-Momento (III)

La traslación *rígida* va a afectar al lagrangiano:  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$$


$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)$$

porque el campo cambia

# Tensor de Energía-Momento (III)

El campo se ve afectado de forma similar

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \delta a^\mu = \partial_\mu \phi \delta a^\mu$$

$$\begin{aligned}\delta(\partial_\mu \phi) &= \frac{\partial(\partial_\mu \phi)}{\partial x^\nu} \delta a^\nu \\ &= \partial_\nu (\partial_\mu \phi) \delta a^\nu = \partial_\mu (\partial_\nu \phi \delta a^\nu)\end{aligned}$$


# Tensor de Energía-Momento (IV)

Así la variación del lagrangiano corresponde:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \right) \delta a^\nu$$

Debido a la variación de  
 $\delta \phi, \partial_\mu (\delta \phi)$

Por otro lado, el lagrangiano varía por la traslación *rígida*:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\nu \mathcal{L} \delta a^\nu = \delta^\mu_\nu \partial_\mu \mathcal{L} \delta a^\nu$$

Variación solo en la  
dirección de  $\delta a^\nu$



# Tensor de Energía-Momento (IV)

Ambas variaciones de cancelan:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \delta a^\nu = 0$$

Lo que debe valer para cualquier traslación *rígida*  $\delta a^\nu$ .

# Tensor de Energía-Momento (V)

Por lo tanto:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu \mathcal{T}_\nu^\mu = 0$$

$$\mathcal{T}_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}$$

Tensor de Energía-Momento

Ecuación de  
continuidad!



# Tensor de Energía-Momento (VI)

La ecuación de continuidad se cumple para las cada componente  $\nu$

$$\begin{array}{lcl} \partial_\mu \mathcal{T}_\nu^\mu = 0 & \begin{array}{l} \nearrow \text{tiempo} \\ \searrow \text{espacio} \end{array} & \begin{array}{l} \partial_\mu \mathcal{T}_0^\mu = 0 \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{T}_0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{T}}_0 = 0 \\ \partial_\mu \mathcal{T}_i^\mu = 0 \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{T}_i}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{T}}_i = 0 \end{array} \end{array}$$

# Tensor de Energía-Momento (VII)

La componente 00 es la densidad hamiltoniana!

$$\mathcal{T}_0^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} = \mathcal{H}$$

La densidad de energía se transporta:

$$\partial_\mu \mathcal{T}_0^\mu = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{T}_0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{T}}_0 = 0$$

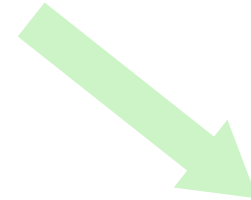
# Tensor de Energía-Momento (VIII)

Al integrar sobre un volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathcal{T}_0 d^3x = - \oint_{\partial V} \vec{\mathcal{T}}_0 \cdot \hat{n} ds$$



Conservación de la energía!  
(si el flujo es nulo)



Flujo de energía  
(Potencia)



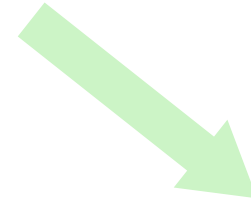
# Tensor de Energía-Momento (IX)

Al integrar sobre un volumen las componentes espaciales:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathcal{T}_i d^3x = - \oint_{\partial V} \vec{\mathcal{T}}_i \cdot \hat{n} ds$$



Conservación del momentum!  
(si el flujo es nulo)



Flujo de momentum  
(Fuerza)

# Ejercicio

- Estudiar el caso donde el espacio rota de manera *rígida* por una rotación infinitesimal, donde  $\vec{x} \rightarrow R(\vec{\delta\theta})\vec{x}$ . Para pequeñas rotaciones se puede considerar que

$$R(\vec{\delta\theta}) \simeq \mathbb{I} + \vec{L} \cdot \vec{\delta\theta}$$

$$\mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- ¿Cómo cambia el lagrangiano y el campo escalar?

# Campos escalares (I)

El bosón de Higgs, los piones, o cualquier partícula de **spin 0**; pueden ser descritos como un campo escalar.



François Englert y Peter Higgs

$h$

$\pi^0, \pi^\pm$



Hideki Yukawa

## Campos escalares (II)

En mecánica cuántica no-relativista:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi \quad \longrightarrow \quad \mathcal{H}\psi = \frac{-1}{2m} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad \longrightarrow \quad E = \frac{p^2}{2m}$$

La ecuación de Schrödinger trata al espacio y al tiempo como coordenadas distintas. De igual forma pasa con la energía y el momentum

$$i\partial_t \rightarrow E \quad - \quad i\partial_x \rightarrow p$$

# Campos escalares (III)

En el caso relativista la relación entre energía y momentum:

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2$$

Nos permite escribir la “versión relativista” de la ecuación de Schrödinger

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \phi - m^2 \phi$$

Ésta es la ecuación de Klein-Gordon, pero  $\phi$  no es una función de onda a la Schrödinger.

# Ecuación de Klein-Gordon (I)

Es la ecuación de movimiento para un campo escalar y es covariante

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi = 0 \quad \longrightarrow \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0$$

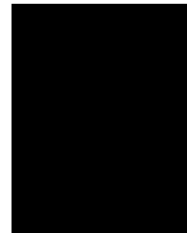
Y admite soluciones de onda plana:

$$\phi(t, \vec{x}) = \phi_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \longrightarrow \quad \omega^2 = k^2 + m^2$$

Relación de dispersión



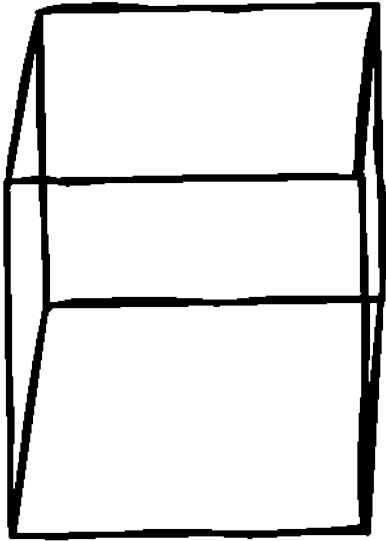
Oskar Klein



Walter Gordon

# Ecuación de Klein-Gordon (II)

La solución más general va a corresponder a una superposición de ondas planas

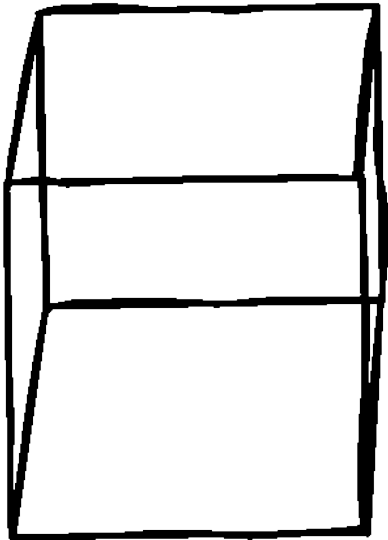


$$\phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left( \frac{a_k}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + \frac{a_k^*}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right)$$

Solución discreta en una caja

# Ecuación de Klein-Gordon (III)

La solución más general va a corresponder a una superposición de ondas planas



$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k}} \left( a(k) e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + a^\dagger(k) e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right)$$

Solución en el continuo



# Lagrangiano campo escalar (I)

La ecuación de movimiento del campo escalar es la ecuación de Klein-Gordon.

El lagrangiano que la genera es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) \quad (\text{campo escalar real})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0$$

# Lagrangiano campo escalar (II)

Al conocer el lagrangiano, podemos calcular la densidad de energía contenida:

$$\mathcal{T}_0^0 = \frac{1}{2} \left( \partial_t \phi^2 + (\partial_i \phi)(\partial_i \phi) + m^2 \phi^2 \right)$$

También la energía y el momentum total:

$$H = \sum_k a_k^* a_k \omega_k \qquad \vec{P} = \sum_k a_k^* a_k \vec{k}$$



Operador de número

# Ejercicios

- Calcular el tensor de energía y momento para el campo escalar real

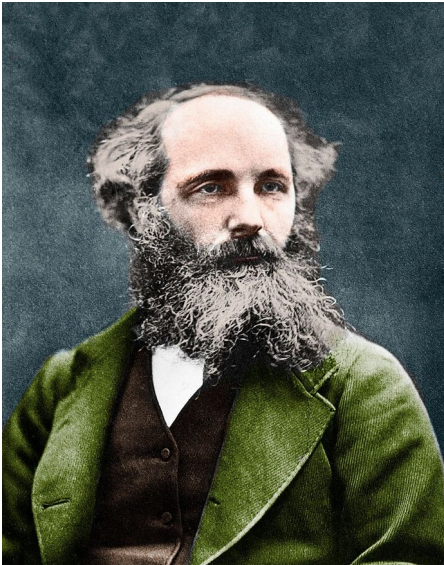
$$\mathcal{T}_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}$$

- Calcular la energía del campo escalar usando:

$$\phi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k}} \left( a(k) e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + a^\dagger(k) e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \right)$$

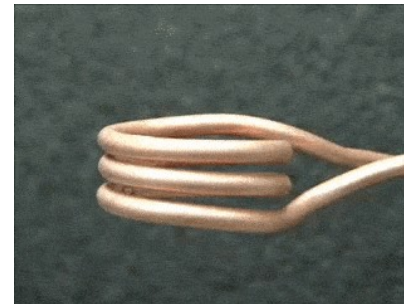
# Electromagnetismo clásico (I)

Una de la primeras partículas de las que tenemos evidencia y que ha generado varias revoluciones en distintos campos.



James C. Maxwell

- James C. Maxwell resumió en 4 ecuaciones décadas de trabajo de muchos científicos
- Unificación de la Electricidad y el Magnetismo



# Electromagnetismo clásico (II)

El electromagnetismo contiene muchos conceptos físicos que son relevantes para la física de partículas.

- Ondas electromagnéticas que se propagan en el vacío
- Fotones: partículas sin masa que viajan a la velocidad de la luz
- Transformaciones de Lorentz (base para la relatividad)
- Simetrías de Gauge
- Conservación de la carga eléctrica
- Conservación de la energía, momentum lineal y angular
- Leyes de la óptica
- CPT: Simetrías discretas



# Ecuaciones de Maxwell (I)

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad \longrightarrow \quad \text{Ley de Gauss}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} \quad \longrightarrow \quad \text{Ley de Amperè (+Maxwell)}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{No monopolos magnéticos}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Ley de Faraday-Maxwell}$$

# Ecuaciones de Maxwell (II)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \rho \\ \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} \end{array} \right\}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Conservación de la carga eléctrica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$



$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

¡La corriente es un 4-vector!

# Ecuaciones de Maxwell (III)

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{array} \right\}$$

Potenciales escalar y vectorial

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$A^\mu = (V, \vec{A})$$

¡El potencial es un 4-vector!



# Ecuaciones de Maxwell (IV)

Las ecuaciones se pueden escribir en términos del tensor antisimétrico:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Que al separarlas por componentes:

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = -E^i$$

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = \epsilon^{ijk} B^k$$

# Ecuaciones de Maxwell (V)

Las ecuaciones se pueden escribir en términos del tensor antisimétrico:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

En forma matricial:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_x & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

# Ecuaciones de Maxwell (VI)

Las ecuaciones homogéneas nacen de la identidad:

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} \equiv 0$$

Y las inhomogéneas corresponden a:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

¡Todo muy elegante!

# Invarianza de Gauge (I)

Los campos eléctricos y magnéticos no cambian si el potencial cambia según:

$$\begin{array}{l} V \rightarrow V - \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla \chi \end{array} \quad \longrightarrow \quad A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \chi$$

Transformación de Gauge

# Invarianza de Gauge (II)

Esta transformación afecta al tensor de Maxwell:

$$A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu} \chi \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad \begin{aligned} F'^{\mu\nu} &= \partial^{\mu} A'^{\nu} - \partial^{\nu} A'^{\mu} \\ F^{\mu\nu} &= \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu} \end{aligned}$$

$$F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \quad \dots \text{de forma trivial!}$$

# Invarianza de Gauge (III)

Las transformaciones de Gauge indican simetrías que no afectan a las ecuaciones de movimiento.

El electromagnetismo es un tipo de **Teoría de Gauge**.

Interacción	Electromagnética	Electrodébil	Fuerte	Teorías de Gran Unificación
Grupo de simetría	$U(1)$	$U(1) \times SU(2)$	$SU(3)$	$SU(5)$

# Lagrangiano electromagnético (I)


Las ecuaciones de Maxwell son las ecuaciones de movimiento del campo electromagnético.

Por lo tanto, deben nacer de un lagrangiano usando el principio de Hamilton

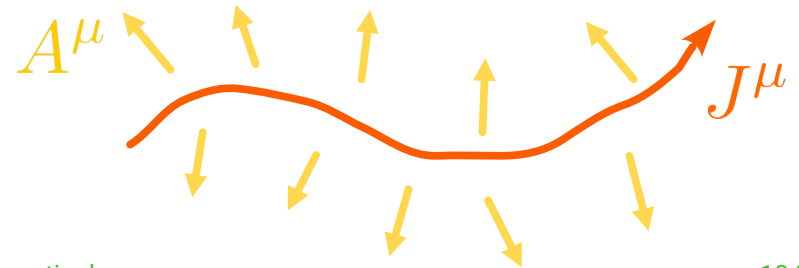
$$S = \int \mathcal{L}_{\text{em}} d^4x \quad \xrightarrow{\delta S = 0} \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} \equiv 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \end{array} \right.$$

# Lagrangiano electromagnético (II)

El lagrangiano debe ser escrito en términos de invariantes de Lorentz:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J_{\mu}A^{\mu}$$


Aquí lo nuevo es que hemos incluido **fuentes externas** de campos electromagnéticos





# Lagrangiano electromagnético (III)

En el caso de un campo vectorial, el lagrangiano corresponde a:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(A^\mu, \partial^\nu A^\mu)$$

La variación de la acción va a corresponder a:

$$\delta S = \int \delta \mathcal{L} d^4x \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} - \partial^\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\nu A^\mu)} \right) = 0$$

Euler-Lagrange

# Lagrangiano electromagnético (IV)

Al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange, sobre el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J_{\mu}A^{\mu}$$

Obtenemos las ecuaciones de Maxwell inhomogeneas:

$$\partial_{\nu}F^{\nu\mu} = J^{\mu}$$

# Ejercicios

- Encontrar las ecuaciones de Maxwell al aplicar las ecuaciones de Klein-Gordon sobre el lagrangiano EM:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J_{\mu}A^{\mu}$$

- Calcular el tensor de energía-momentum EM y su componente 00

$$\mathcal{T}_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A^{\lambda})}\partial_{\nu}A^{\lambda} - \delta_{\nu}^{\mu}\mathcal{L}$$

# Simetría de Gauge (I)

Si aplicamos una transformación de Gauge:

$$A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu} \chi$$

La variación de la acción corresponde a:

$$\delta S = \int -J_{\mu} \partial^{\mu} \chi d^4x \quad \longrightarrow \quad \delta S = \int (\partial^{\mu} J_{\mu}) \chi d^4x$$

$$\delta S = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial^{\mu} J_{\mu} = 0$$

Conservación de la carga

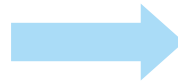
# Simetría de Gauge (II)

Al expandir las ecuaciones de Maxwell inhomogeneas:  $\partial_\nu F^{\nu\mu} = J^\mu$

$$\partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = \partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = J^\mu$$

Sin perder generalidad, se puede conectar  $A^\mu$  usando una transformación de Gauge

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$



$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = J^\mu$$

Gauge de Lorentz

# Simetría de Gauge (III)

En la ausencia de fuentes externas:  $\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0$        $\partial_\mu A^\mu = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A_0 - \nabla^2 \vec{A} = 0 \quad \longrightarrow \quad A^\mu(t, \vec{x}) \propto A_0^\mu e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

Ecuación de ondas

Solución de ondas planas:  
Ondas electromagnéticas

Las ondas EM tienen relación de dispersión:  $\omega^2 = k^2$

¡El fotón no tiene masa!

# Simetría de Gauge (IV)

Otro gauge conocido es el **Gauge de Coulomb** también conocido como el **Gauge de Radiación**:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \partial_\mu A^\mu = \partial_0 A^0$$

Las ecs de Maxwell inhomogeneas corresponden a:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial_0 A^0 = J^\mu$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \nabla^2 A^0 &= -\rho & \longrightarrow \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} &= \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla A^0 \end{aligned}$$

Potencial escalar solo depende  
de la densidad de carga

Ondas planas debido con la corriente y la densidad como fuentes

# Polarización del fotón (I)

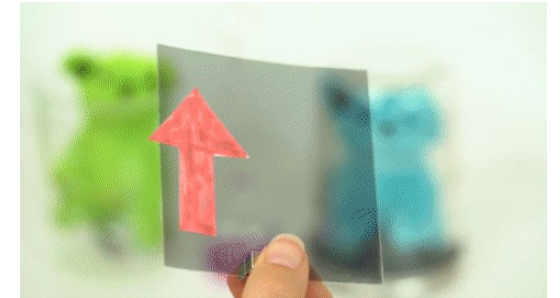
Las ondas electromagnéticas las podemos describir en términos de sus polarizaciones:

$$A^\mu = a \epsilon^\mu e^{ik_\mu x^\mu}$$

Gauge de Lorentz  $k_\mu \epsilon^\mu = 0 \iff \vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0$  Gauge de Coulomb

Solo existen 2 vectores ortogonales a  $\vec{k}$ :  $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2$

$$\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2 = 0 \quad \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_1 = \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{\epsilon}_2 = 1$$



El fotón tiene sólo 2 grados de libertad

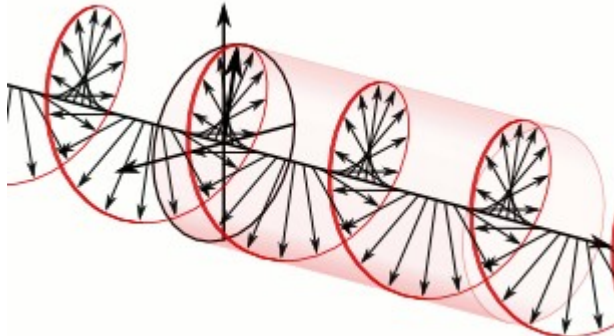


# Polarización del fotón (II)

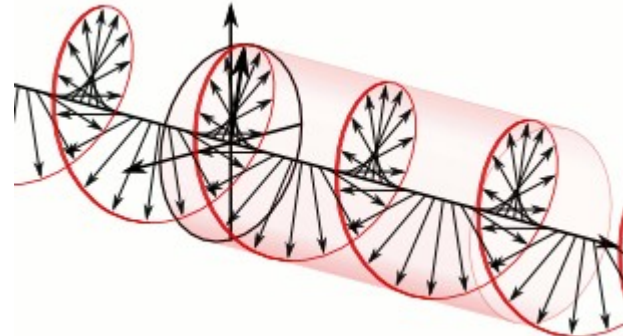
Si la onda se propaga en z:  $\vec{k} = k\hat{z}$   $\longrightarrow$   $\vec{\epsilon}_1 = \hat{i}$ ,  $\vec{\epsilon}_2 = \hat{j}$

Pero mejor es definir las polarizaciones circulares:

$$\vec{\epsilon}_R = -\frac{\vec{\epsilon}_1 + i\vec{\epsilon}_2}{\sqrt{2}}$$



$$\vec{\epsilon}_L = \frac{\vec{\epsilon}_1 - i\vec{\epsilon}_2}{\sqrt{2}}$$



# Simetrías discretas en EM (I)

Habíamos nombrado algunas simetrías discretas. El electromagnetismo es invariante ante 3:

- Paridad [P]

$$x^\mu = (t, \vec{x}) \longrightarrow P[x^\mu] = (t, -\vec{x})$$

- Inversión temporal [T]

$$x^\mu = (t, \vec{x}) \longrightarrow T[x^\mu] = (-t, \vec{x})$$

- Conjugación de carga [C]

$$q \longrightarrow C[q] = -q$$

# Simetrías discretas en EM (II)

Ante paridad [P]

$$P[\partial^\mu] = (\partial^0, -\partial^i)$$

$$\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$$

$$P[J^\mu] = (J^0, -J^i)$$

$$J^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt}$$

$$P[A^\mu] = (A^0, -A^i)$$

$$P[\vec{E}] = -\vec{E}$$

$$P[\vec{B}] = \vec{B}$$

*Así las ecuaciones de Maxwell son invariantes*

# Simetrías discretas en EM (III)

Ante inversión temporal [T]

$$T[\partial^\mu] = (-\partial^0, \partial^i)$$

$$t \rightarrow -t$$

$$T[J^\mu] = (J^0, -J^i)$$

$$J^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt}$$

$$T[A^\mu] = (A^0, -A^i)$$

$$T[\vec{E}] = \vec{E}$$

$$T[\vec{B}] = -\vec{B}$$

*Así las ecuaciones de Maxwell son invariantes*

# Simetrías discretas en EM (IV)

Ante conjugación de carga [C]

$$C[\partial^\mu] = (\partial^0, \partial^i)$$

*No afecta*

$$C[J^\mu] = -J^\mu$$

$$J^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt}$$

$$C[A^\mu] = -A^\mu$$

$$C[\vec{E}] = -\vec{E}$$

$$C[\vec{B}] = -\vec{B}$$

*Así las ecuaciones de Maxwell son invariantes*

# Ejercicios

- Mostrar que el lagrangiano EM es invariante ante C, P, y T.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J_{\mu}A^{\mu}$$

- ¿Qué sucede con el tensor de Energía y Momentum?

$$\mathcal{T}_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A^{\lambda})}\partial_{\nu}A^{\lambda} - \delta_{\nu}^{\mu}\mathcal{L}$$

DAFI-02255

# Introducción a la Física de Partículas

<https://robertolineros.com/teaching/fisica-de-particulas/>





Universidad Católica del Norte  
Departamento de Física

**DAFI-02255**

# Introducción a la Física de Partículas

**Roberto Lineros**

**Segundo Semestre 2020**

<https://robertolinos.com/teaching/fisica-de-particulas/>



# Campos Escalares (Re-visitado)

La ecuación de Klein-Gordon describe el *movimiento* de un campo escalar real.

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0$$

Pero si volvemos a ver a las ecuaciones de Maxwell libres i.e. sin fuentes:

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0 \qquad \partial_\mu A^\mu = 0$$

Cada componente corresponde a una ecuación de Klein-Gordon!

# Campos escalares complejos (I)

El campo escalar no tiene que ser solamente una función real, también puede ser compleja.

En este caso, los campos complejos van a describir partículas cargadas debido a que tienen una simetría interna.

Por ejemplo:

 $\pi^{\pm}$ 

Piones cargados

 $H^{\pm}$ 

Higgses cargados

\* cuando se hable de carga, no necesariamente es carga eléctrica

# Campos escalares complejos (II)

Consideremos 2 campos escalares reales de igual masa.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - m^2 \phi_1^2) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - m^2 \phi_2^2)$$

Debido a la similitud de los campos, podemos ordenarlos en un vector:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi^T \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^T \Phi)$$

Aquí solo hemos generado un objeto basado en campos reales

# Campos escalares complejos (III)

Combinando los campos reales tal que:

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \quad \phi^* = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}$$

Entonces el lagrangiano resultante es:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$


¡Lagrangiano de un campo complejo!

# Campos escalares complejos (IV)


Usando el principio de Hamilton, se pueden encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu \phi, \phi^*, \partial^\mu \phi^*)$$

¡2 coordenadas generalizadas!


$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

Ecuación de Klein-Gordon


$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi^* = 0$$

Ecuación de Klein-Gordon CC

# Simetrías internas (I)

En la representación de vector de los campos escalares:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \Phi' = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

El lagrangiano es invariante ante rotaciones en 2 dimensiones

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \underbrace{(\partial_\mu \Phi^T \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^T \Phi)}_{\text{invariant}} = \frac{1}{2} \underbrace{(\partial_\mu \Phi'^T \partial^\mu \Phi' - m^2 \Phi'^T \Phi')}_{\text{invariant}} = \mathcal{L}'$$

Simetría bajo rotaciones en 2D i.e. Grupo SO(2)

# Simetrías internas (II)

En la representación de campo complejo:

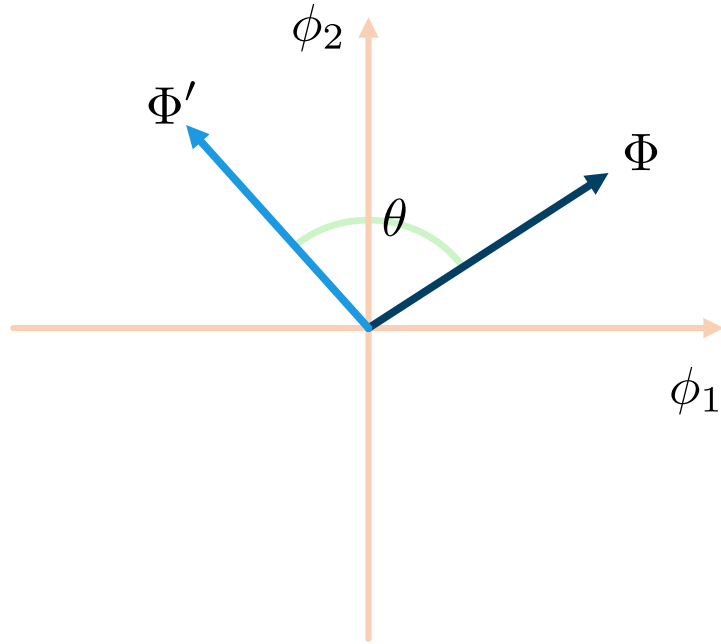
$$\phi, \phi^* \quad \longrightarrow \quad \phi' = e^{i\theta} \phi \quad \phi'^* = e^{-i\theta} \phi^*$$

El lagrangiano es invariante ante cambios de fase de los campos:

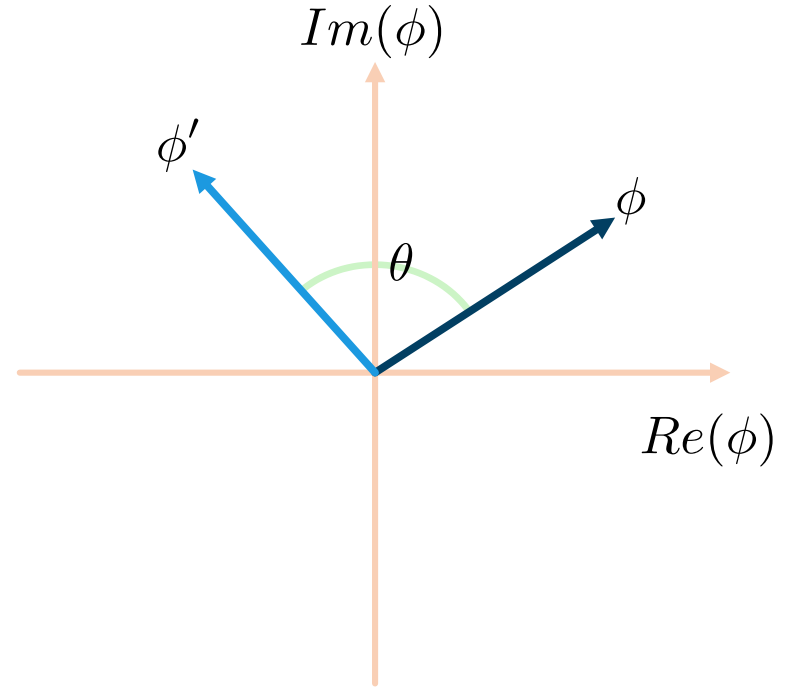
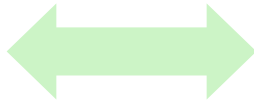
$$\mathcal{L} = \underbrace{\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi}_{\text{invariant}} = \underbrace{\partial_\mu \phi'^* \partial^\mu \phi' - m^2 \phi'^* \phi'}_{\text{invariant}} = \mathcal{L}'$$

Simetría bajo rotaciones en el plano complejo i.e. Grupo U(1)

# Simetrías internas (III)



Grupo  $SO(2)$



Grupo  $U(1)$

Isomorfismo



# Simetrías en la E. de Schrödinger (I)

En la ecuación de Schrödinger se enseña que  $\rho = |\psi|^2$  es una densidad de probabilidad y que se conserva.

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m}\psi = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) - \frac{i}{2m}\nabla \cdot (\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

¡la probabilidad se conserva!

# Simetrías en la E. de Schrödinger (II)

La ecuación de Schrödinger libre tiene soluciones de onda plana.

$$\psi = N e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

La densidad:

$$\rho = \psi^* \psi$$

$$\rho = |N|^2$$

Siempre positivo. Probabilidad

La corriente:

$$\vec{J} = -\frac{i}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

$$\vec{J} = |N|^2 \frac{\vec{k}}{m} = \rho \vec{v}$$

# Simetrías en la E. de Schrödinger (III)

Hay una corriente conservada, pero ¿cuál es la simetría?

Si vemos el lagrangiano que genera la ecuación de Schrödinger:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\psi^* \partial_t \psi - \partial_t \psi^* \psi) - \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - \psi^* V \psi$$

¡El lagrangiano es invariante ante un refases de la función de onda!

$$\psi' = e^{i\theta} \psi$$

# Ejercicios

- Mostrar que las ecuaciones de Euler-Lagrange del siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\psi^* \partial_t \psi - \partial_t \psi^* \psi) - \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - \psi^* V \psi$$

corresponden a la ecuación de Schrödinger.

# Simetrías en el campo escalar complejo (I)

En analogía al caso de Schrödinger. El lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

es invariante ante el refase del campo:  $\phi' = e^{i\theta} \phi$

# Simetrías en el campo escalar complejo (II)

Si el campo complejo se afecta debido a una transformación, de manera general se obtiene:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}\delta\phi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\delta(\partial_\mu\phi^*)$$

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right) + \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\delta\phi^* \right)$$

El lagrangiano es invariante ante esa transformación, así que:  $\delta\mathcal{L} = 0$

# Simetrías en el campo escalar complejo (III)

Una transformación infinitesimal:  $\phi' = (1 + i\delta\theta)\phi \longrightarrow \delta\phi = i\phi\delta\theta$

Produce una variación del lagrangiano

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left( i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi) \right) \delta\theta$$

Así:  $\partial_\mu S^\mu = 0$

¡hay una conservación!

$$S^\mu = i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi)$$

¡corriente conservada!

# Simetrías en el campo escalar complejo (IV)

¿Esta corriente tiene una densidad de probabilidad a'la Schrödinger?

$$S^\mu = i(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi)$$

La solución de onda plana nos entrega lo siguiente:

$$\phi = N e^{ip_\mu x^\mu}$$

La densidad

$$S^0 = 2E|N|^2$$

¿siempre positiva?

La corriente

$$\vec{S} = 2|N|^2 \vec{p}$$



# Antimateria (I)

El descubrimiento del positrón, la antipartícula del electrón, abrió el camino para entender el problema de los estados de energía negativa

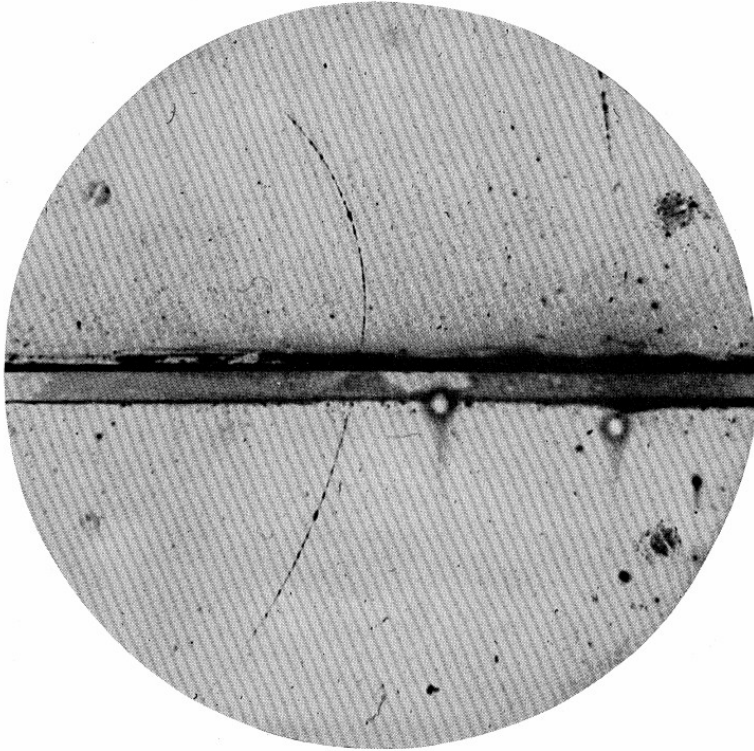


Fig. 1. A 63 million volt positron ( $H\rho = 2.1 \times 10^8$  gauss-cm) passing through a 6 mm lead plate and emerging as a 23 million volt positron ( $H\rho = 7.5 \times 10^4$  gauss-cm). The length of this latter path is at least ten times greater than the possible length of a proton path of this curvature.

$e^-$  electrón

$e^+$  positrón

MARCH 15, 1933 PHYSICAL REVIEW VOLUME 43

## The Positive Electron

CARL D. ANDERSON, *California Institute of Technology, Pasadena, California*  
(Received February 28, 1932)

Out of a group of 1300 photographs of cosmic-ray tracks in a vertical Wilson chamber 15 tracks were of positive particles which could not have a mass as great as that of the positron. From an examination of the energy loss and ionization produced it is concluded that the charge is less than twice, and is probably exactly equal to, that of the positron. If these particles carry unit positive charge the

curvature and ionization produced require the mass to be less than twenty times the electron mass. These particles will be called positrons. Because they occur in groups associated with other tracks it is concluded that they must be secondary particles ejected from atomic nuclei.

Editor

ON August 2, 1932, during the course of photographing cosmic-ray tracks produced in a vertical Wilson chamber (magnetic field of 15,000 gauss) designed in the summer of 1930 by Professor R. A. Millikan and the writer, the tracks shown in Fig. 1 were obtained, which seemed to be interpretable only on the basis of the existence in this case of a particle carrying a positive charge but having a mass of the same order of magnitude as that normally possessed by a free negative electron. Later study of the photograph by a whole group of men of the Norman Bridge Laboratory only tended to strengthen this view. The reason that this interpretation seemed so inevitable is that the track appearing on the upper half of the figure cannot possibly have a mass as large as that of a proton for as soon as the mass is fixed the energy is at once fixed by the curvature. The energy of a proton of that curvature comes out 300,000 volts, but a proton of that energy according to well established and universally accepted determinations<sup>1</sup> has a total range of about 5 mm in air while that portion of the range actually visible in this case exceeds 5 cm without a noticeable change in curvature. The only escape from this conclusion would be to assume that at exactly the same instant (and the sharpness of the tracks determines that instant to within about a fifth of a second) two independent

electrons happened to produce two tracks so placed as to give the impression of a single particle shooting through the lead plate. This assumption was dismissed on a probability basis, since a sharp track of this order of curvature under the experimental conditions prevailing occurred in the chamber only once in some 500 exposures, and since there was practically no chance at all that two such tracks should line up in this way. We also discarded as completely untenable the assumption of an electron of 20 million volts entering the lead on one side and coming out with an energy of 60 million volts on the other side. A fourth possibility is that a photon, entering the lead from above, knocked out of the nucleus of a lead atom two particles, one of which shot upward and the other downward. But in this case the upward moving one would be a positive of small mass so that either of the two possibilities leads to the existence of the positive electron.

In the course of the next few weeks other photographs were obtained which could be interpreted logically only on the positive-electron basis, and a brief report was then published<sup>2</sup> with due reserve in interpretation in view of the importance and striking nature of the announcement.

MAGNITUDE OF CHARGE AND MASS  
It is possible with the present experimental data only to assign rather wide limits to the  
<sup>1</sup> C. D. Anderson, *Science* 75, 238 (1932).

# Antimateria (II)

Quarks	$u$	$c$	$t$
	$d$	$s$	$b$
Leptones	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$
	$e$	$\mu$	$\tau$

El Modelo Estándar incluye a las antipartículas.

Las antipartículas tienen los números cuánticos opuestos a sus partículas compañeras.

$\bar{u}$	$\bar{c}$	$\bar{t}$	Anti-Quarks
$\bar{d}$	$\bar{s}$	$\bar{b}$	
$\bar{\nu}_e$	$\bar{\nu}_\mu$	$\bar{\nu}_\tau$	Anti-Leptones
$\bar{e}$	$\bar{\mu}$	$\bar{\tau}$	

# Antimateria (III)

La corriente en el campo escalar complejo **no** corresponde a una probabilidad ya que:

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

Podemos interpretar a los estados de energía negativa como partículas que retroceden en el tiempo.

energía positiva

$$\phi = N e^{i(\sqrt{p^2 + m^2} t - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

energía negativa

$$\phi = N e^{i(-\sqrt{p^2 + m^2} t - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

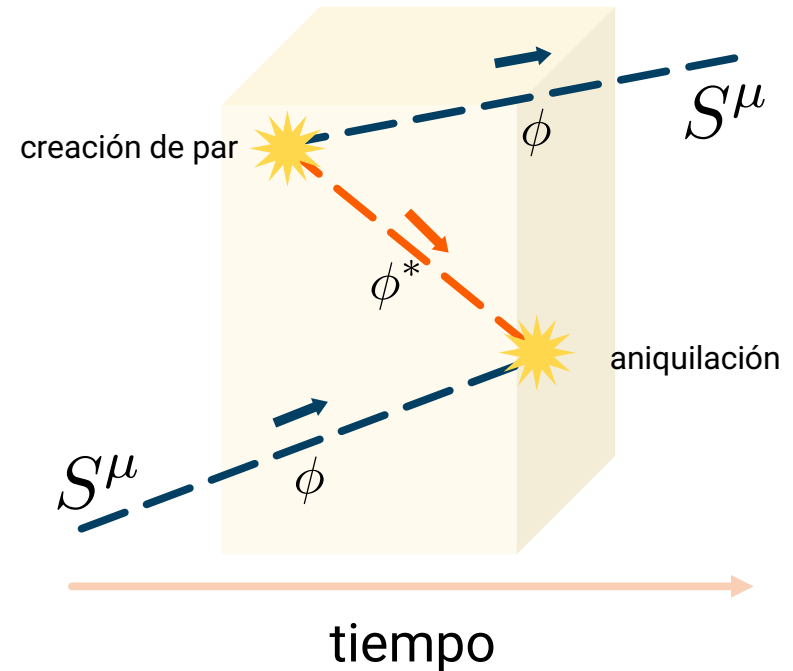
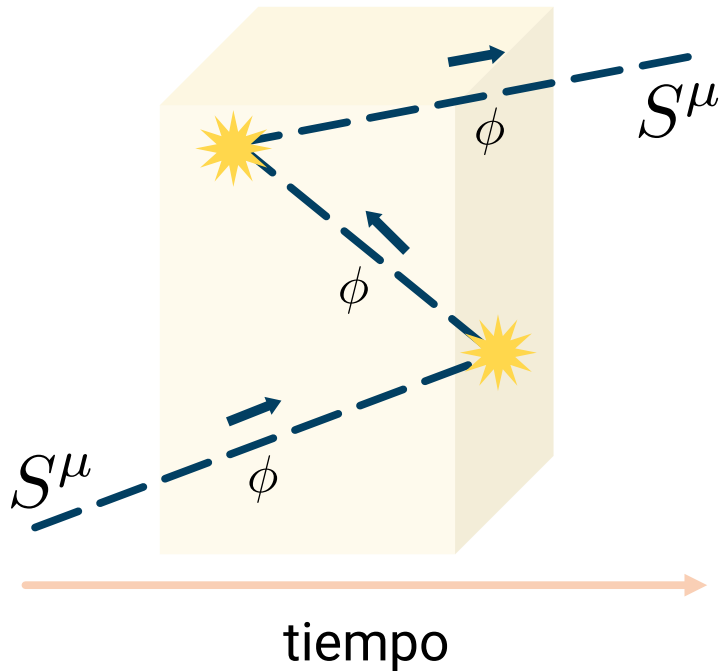


$$\phi = N e^{i(\sqrt{p^2 + m^2} (-t) - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

¡retrocede en el tiempo!

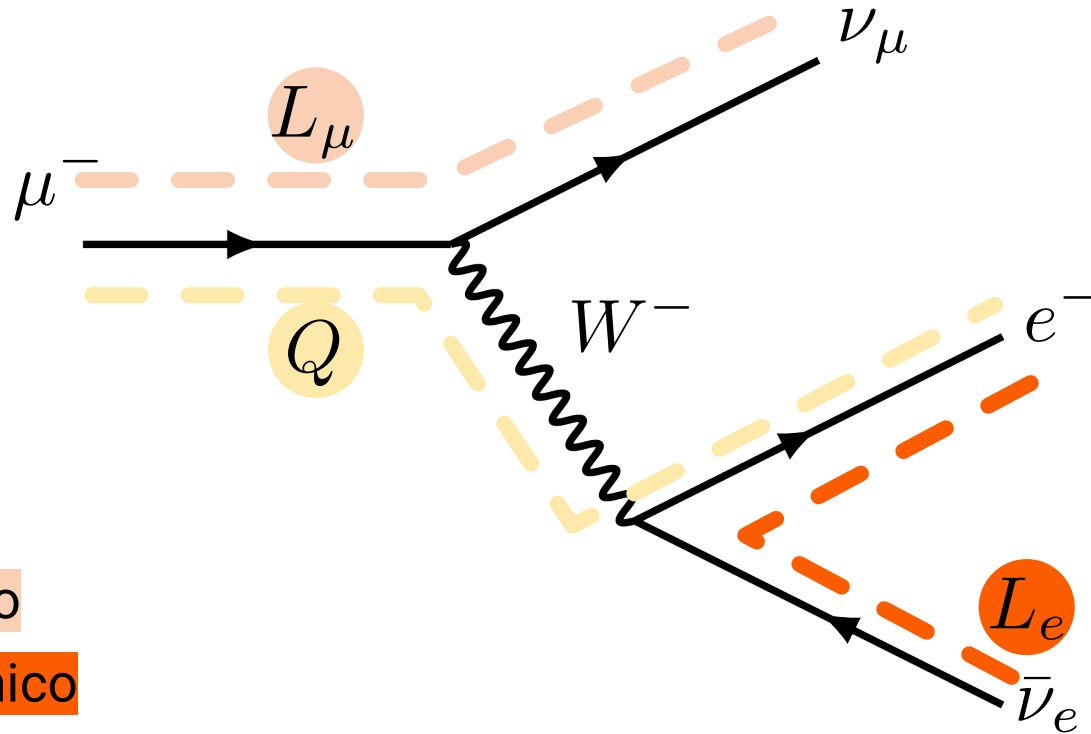
# Corrientes (I)

Independiente de la interpretación, lo importante es que la corriente se conserva.



# Corrientes (II)

La corriente conservada nos va a indicar las simetrías de los procesos



Carga eléctrica

Número muónico

Número electrónico

# Interacciones del campo escalar (I)

Hasta el momento hemos considerado el caso de campos escalares libres, es decir:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0 \quad \leftarrow \text{No fuentes externas}$$

El lagrangiano de interacción es donde se introduce una fuente de campo.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

# Interacciones del campo escalar (II)

Así identificamos en el lagrangiano distintos términos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \rho \phi$$

término cinético

término de masa

interacción

# Interacciones del campo escalar (III)

Este lagrangiano tiene su ecuación de movimiento:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = \rho \quad \leftarrow \text{fuente externa}$$

En el caso de una fuente puntual y que es constante en el tiempo:

$$\rho = g\delta^3(\vec{x}) \quad \leftarrow \text{delta de Dirac en 3D}$$



# Interacciones del campo escalar (IV)

Como la fuente que consideramos es independiente del tiempo, entonces:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = g\delta^3(\vec{x}) \quad \longrightarrow \quad (-\nabla^2 + m^2)\phi = g\delta^3(\vec{x})$$

Vamos a resolver la ecuación tiempo-independiente usando la transformada de Fourier del campo:

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{\phi}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{\phi}(\vec{k}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} \phi(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

# Interacciones del campo escalar (V)

Nuestra ecuación se transforma en:

$$(k^2 + m^2)\tilde{\phi}(\vec{k}) = \frac{g}{(2\pi)^{3/2}}$$

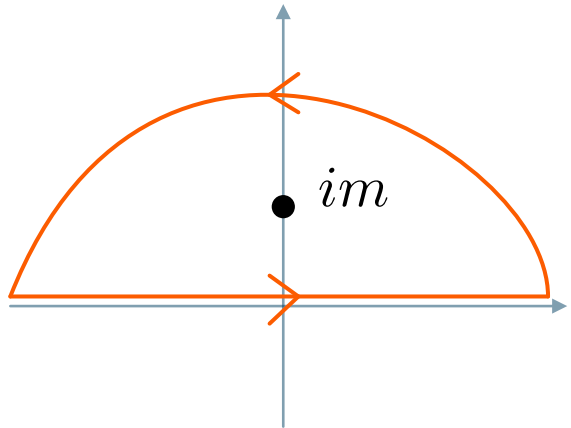
Por lo tanto, su solución es fácil de obtener usando la transformada de Fourier inversa

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^2 + m^2}$$

# Interacciones del campo escalar (VI)

La integral se puede resolver usando los residuos en:  $k = \pm im$

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{k^2 + m^2} = \frac{\pi}{ix} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2 dk}{k^2 + m^2} e^{ikx}$$

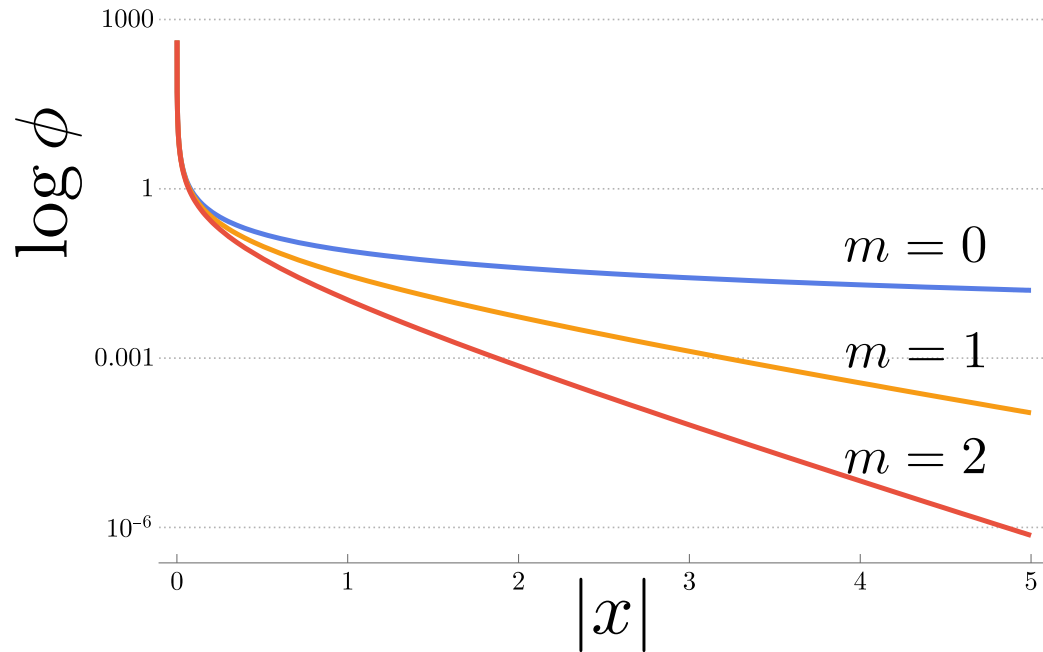


$$\phi(\vec{x}) = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-m|x|}}{|x|}$$

Campo de Yukawa

# Interacciones del campo escalar (VII)

El campo de Yukawa es producido por una fuente puntual en el origen.

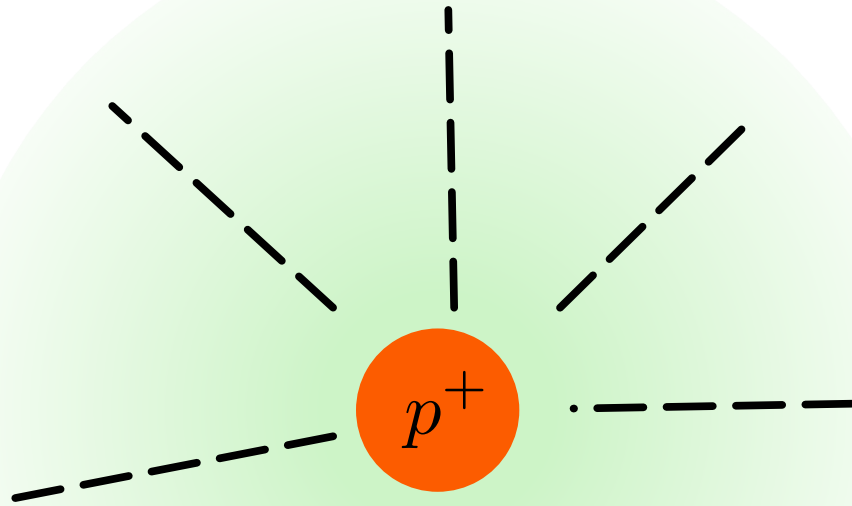


$$\phi(\vec{x}) = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-m|x|}}{|x|}$$

decaimiento exponencial por  
sobre el decaimiento  $1/x$

# Interacciones del campo escalar (VIII)

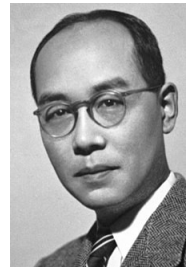
Originalmente Yukawa asoció esta solución al campo de mesones que hay en torno a un nucleón



$$\phi(\vec{x}) = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-m|x|}}{|x|}$$

El protón y el neutrón son fuentes de mesones .... como los piones.

La extensión del campo depende de la masa.



Hideki Yukawa

# Interacciones del campo escalar (IX)

Si se quiere ver como 2 nucleones interactúan, hay que calcular el hamiltoniano de interacción.

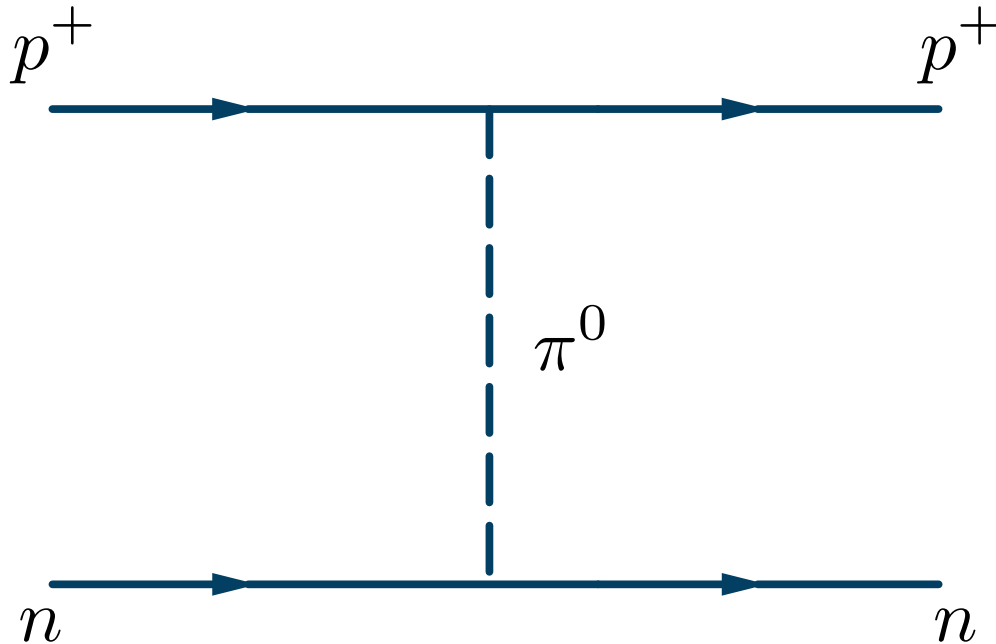
$$H = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x d^3x' \rho_1(\vec{x}) \rho_2(\vec{x}') \frac{e^{-m|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$H = \int d^3x d^3x' \rho_1(\vec{x}) \rho_2(\vec{x}') V(|\vec{x}-\vec{x}'|)$$

$$V(r) = -\frac{e^{-mr}}{4\pi r}$$

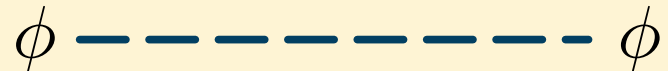
Potencial de Yukawa

# Interacciones del campo escalar (X)



Visto con diagramas, la interacción protón neutrón es mediada a través de piones

La información de la fuente la transporta el propagador



# Ejercicios

- Escriba el lagrangiano para el campo escalar con simetría  $SO(2)$  que incluya fuentes externas.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \partial_\mu \Phi^T \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^T \Phi \right) + (\text{corriente} - \text{campo})$$

- Encuentre la corriente conservada asociada a esa transformación

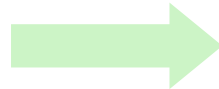


# Electrodinámica de campos escalares (I)

El lagrangiano del campo escalar complejo es invariante ante refaseamiento del campo:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

$$\phi'(x^\mu) = e^{i\theta} \phi(x^\mu)$$



$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$$

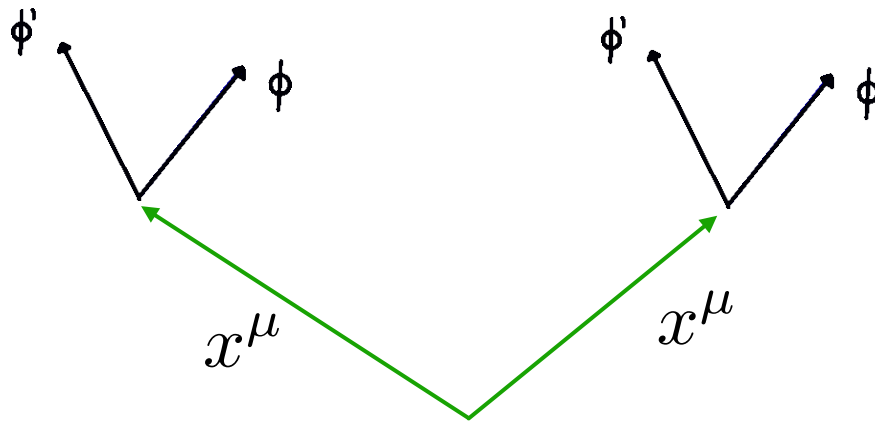
invariante

Lo que conlleva a una corriente conservada debido a la **simetría U(1)**

# Electrodinámica de campos escalares (II)

En este caso, el campo lo refaseamos independiente de la coordenada donde lo estemos viendo.

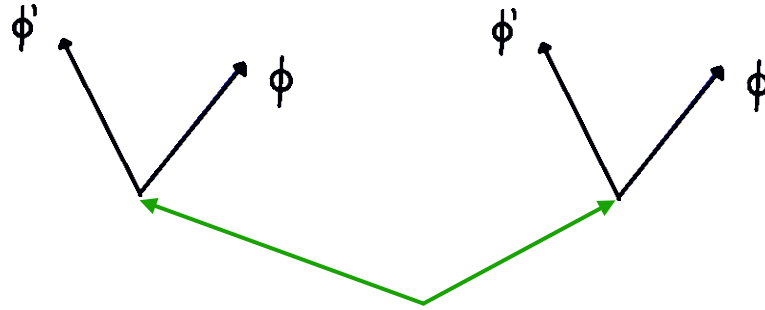
Esto se conoce como una transformación **U(1) global**



el campo en todos los puntos  
del espacio transforma igual

# Electrodinámica de campos escalares (III)

Ahora vamos a considerar una transformación  $U(1)$  local, es decir, el campo va a ser refaseado en cada punto del espacio-tiempo.




$$\phi'(x^\mu) = e^{i\theta(x^\mu)} \phi(x^\mu)$$

¿Es el lagrangiano invariante?

# Electrodinámica de campos escalares (IV)

$$\phi'(x^\mu) = e^{i\theta(x^\mu)} \phi(x^\mu)$$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$



El término de masa es invariante ante transformaciones U(1) local

# Electrodinámica de campos escalares (V)

Aplicando la derivada sobre el campo escalar transformado localmente:

$$\partial^\mu \phi' = e^{i\theta} (\partial^\mu \phi + i\partial^\mu \theta \phi)$$

$$\partial_\mu \phi'^* = e^{-i\theta} (\partial_\mu \phi^* - i\partial_\mu \theta \phi^*)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi'^* \partial^\mu \phi' &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta \phi^* \phi \\ &\quad + \partial_\mu \theta (i(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi)) \end{aligned}$$

No es invariante, pero reconocemos la corriente U(1)

# Electrodinámica de campos escalares (VI)

Para remediar la situación vamos a introducir el campo del fotón sin fuentes externas. De tal forma que:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

Además necesitamos introducir la **derivada covariante**:

$$D^\mu = \partial^\mu - ieA^\mu$$

# Electrodinámica de campos escalares (VII)

La derivada covariante es una derivada que cumple:

$$D^\mu \phi' = U(x) (D^\mu \phi) \quad \longleftrightarrow \quad \phi' = U(x) \phi$$

Es decir transforma como el campo.

Así las derivadas comunes las promovemos a **covariantes**:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

¿Es este lagrangiano invariante?

# Electrodinámica de campos escalares (VIII)

El término de la derivada para el **campo transformado U(1) local** queda

$$D^\mu \phi' = e^{i\theta} (\partial^\mu - ieA^\mu + i\partial^\mu \theta) \phi$$

La simetría de Gauge del electromagnetismo nos permite redefinir  $A^\mu$  a través de una transformación de Gauge sin afectar al lagrangiano EM.

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \chi$$



# Electrodinámica de campos escalares (IX)

Afectando la derivada covariante de la siguiente manera:

$$D^\mu \phi' = e^{i\theta} (\partial^\mu - ieA^\mu + ie\partial^\mu \chi + i\partial^\mu \theta) \phi$$

Asociando el gauge con el refaseamiento:

$$e\chi = -\theta$$

Así recuperamos la definición de **derivada covariante de Gauge**.

$$D^\mu \phi' = e^{i\theta} (\partial^\mu - ieA^\mu) \phi = e^{i\theta} D^\mu \phi$$

# Lagrangiano SQED (I)

El lagrangiano es invariante de U(1) local gracias a la simetría de gauge del EM.

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

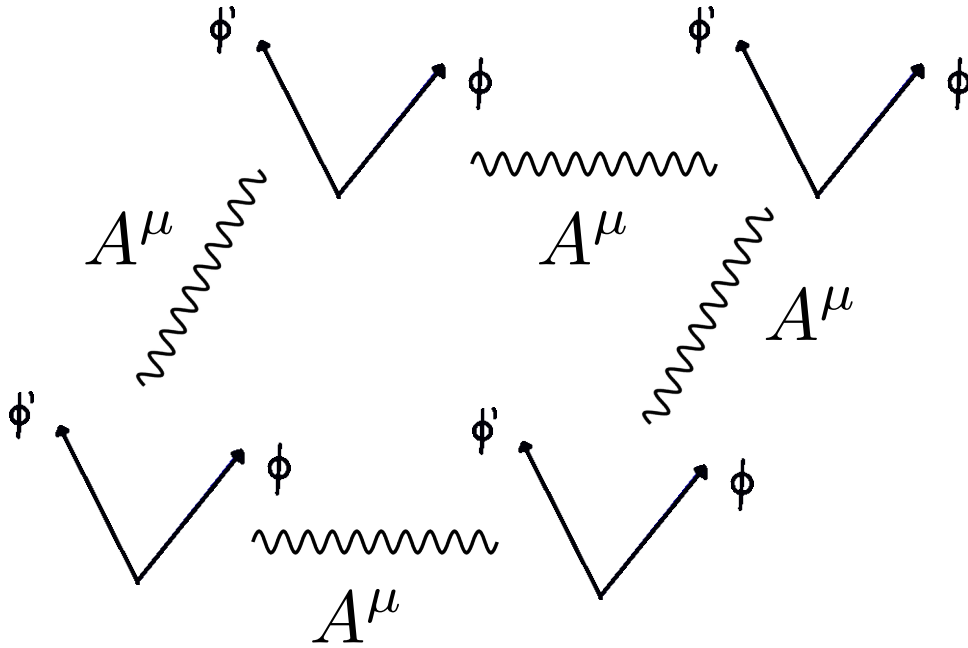
Lagrangiano SQED

Donde las transformaciones son:

$$\phi' = e^{i\theta} \phi$$

$$A'^\mu = A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \theta$$

# Lagrangiano SQED (II)



La simetría **U(1) local** viene preservada por la simetría de gauge.

**Bosones de Gauge**

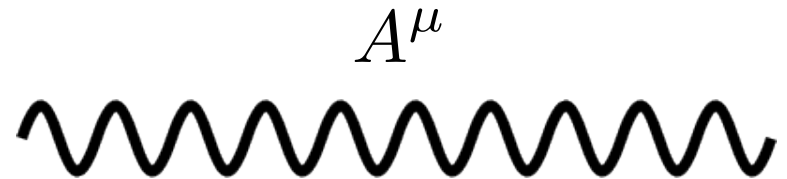
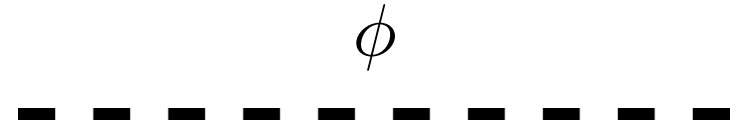
# Lagrangiano SQED (III)

Si expandimos el lagrangiano vamos a identificar los lagrangianos libre y las interacciones entre campos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

$$\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

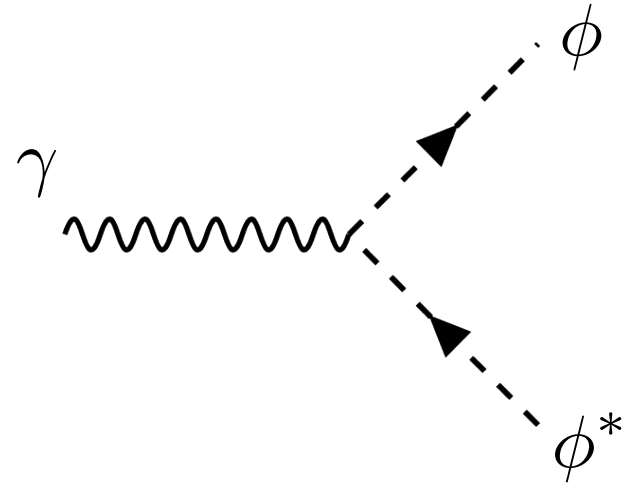
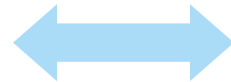
$$-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$



# Lagrangiano SQED (IV)

Los términos de interacción vienen de las derivadas covariantes.  $(D_\mu \phi)^* D^\mu \phi$

$$ieA_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$$



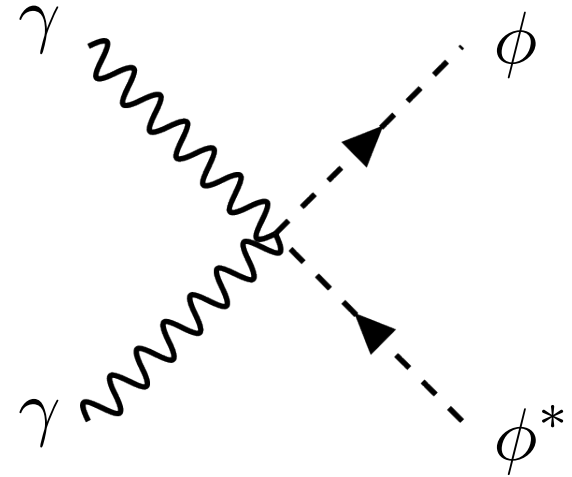
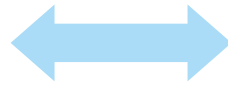
3 campos en el lagrangiano

vértice de 3 patas

# Lagrangiano SQED (V)

Los términos de interacción vienen de las derivadas covariantes.  $(D_\mu \phi)^* D^\mu \phi$

$$e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi$$



4 campos en el lagrangiano

vértice de 4 patas

# Ejercicios

- Escriba las ecuaciones de movimiento para el campo escalar y el campo EM según el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

# Fermiones

La materia que conocemos está conformada por fermiones (partículas de *spin* semientero)

Quarks	$u$	$c$	$t$
	$d$	$s$	$b$
Leptones	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$
	$e$	$\mu$	$\tau$

Por ejemplo, un electrón puede estar en los estados:

$$|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$$

En el Modelo Estándar, los leptones y los quarks son fermiones



# Fermiones en QM no relativista (I)

En Mecánica Cuántica, el electrón puede ser descrito por 2 funciones de onda:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(x) \\ \psi_{\downarrow}(x) \end{pmatrix}$$

La dinámica viene descrita por la ecuación de Schrödinger-Pauli:

$$i\partial_t\psi = \left( \left( \frac{1}{2m} \left( i\nabla - e\vec{A} \right)^2 - eA_0 \right) \mathbb{I}_{2\times 2} + \mu_B \vec{B} \cdot \vec{\sigma} \right) \psi$$

# Fermiones en QM no relativista (II)

La ecuación de Schrödinger-Pauli contiene mucha física:

$$i\partial_t\psi = \left( \left( \frac{1}{2m} \left( i\nabla - e\vec{A} \right)^2 - eA_0 \right) \mathbb{I}_{2\times 2} + \mu_B \vec{B} \cdot \vec{\sigma} \right) \psi$$

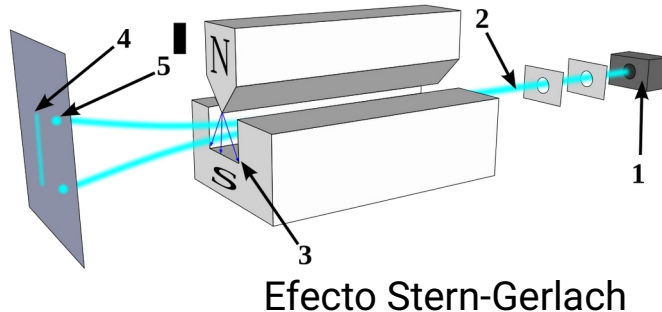
Potencial Magnético  
Vectorial

Potencial Escalar

Magnetón de Bohr

Campo Magnético

Matrices de Pauli



$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Vector de Pauli

# Fermiones en QM no relativista (III)

Las **matrices de Pauli** son y serán relevante para describir transiciones de spin.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tienen la siguiente relación de conmutación.

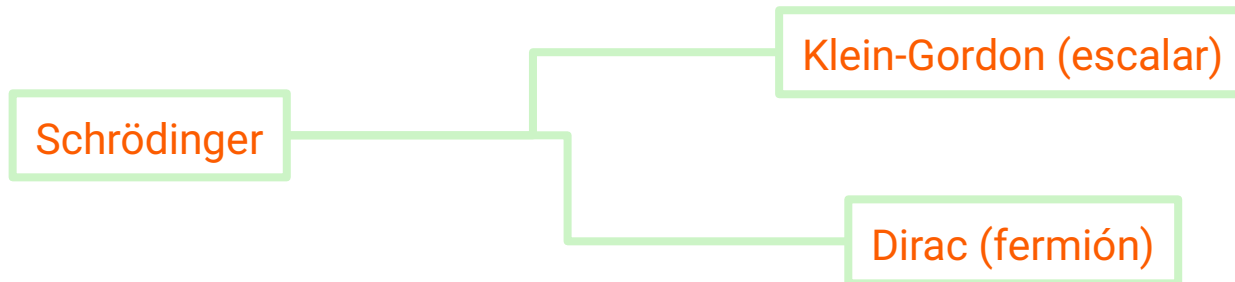
$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

Generadores del Grupo de Simetría SU(2)

# Ecuación de Dirac (I)

Es una descripción cuántico-relativista del electrón.

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad \longrightarrow \quad E^2 = p^2 + m^2$$



Paul Dirac

# Ecuación de Dirac (II)

Uno de los puntos cruciales cuando se formula un modelo relativista es que tiempo y espacio aparecen en potencias iguales.

$$i\partial_t\psi = -\frac{\nabla^2}{2m}\psi$$

No relativista

$$\partial_t^2\psi = (\nabla^2 + m^2)\psi$$

Relativista (Klein-Gordon)

# Ecuación de Dirac (III)

Dirac propuso una dependencia lineal en el momentum, de tal manera que:

$$i\partial_t\psi = H\psi \quad \longrightarrow \quad H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m = -i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta m$$

Para que todo tenga sentido  $\vec{\alpha}, \beta$  son matrices.

Por lo tanto,

$$(i\partial_t + i\vec{\alpha} \cdot \nabla - \beta m) \psi = 0$$

Ecuación de Dirac

# Ecuación de Dirac (IV)

La ecuación de Dirac **debe** reproducir la relación relativista entre energía y momentum.

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2$$

Así el hamiltoniano (energía) al cuadrado:

$$H^2 = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)$$

$$H^2 = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p})^2 + (\beta m)^2 + (\vec{\alpha} \cdot \vec{p})(\beta m) + (\beta m)(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})$$

# Ecuación de Dirac (V)

Para satisfacer:

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})^2 + (\beta m)^2 + (\vec{\alpha} \cdot \vec{p})(\beta m) + (\beta m)(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) = \vec{p}^2 + m^2$$

Es necesario que las matrices cumplan que:

$$\beta^2 = \mathbb{I}$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\mathbb{I}\delta_{ij}$$

Anticomutador:  $\{A, B\} = AB + BA$



# Ecuación de Dirac (VI)

La propiedad que cumplen estas matrices pueden ser construida en términos de las **matrices de Pauli**

Matrices en la *representación Chiral*

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices en la *representación de Dirac*

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

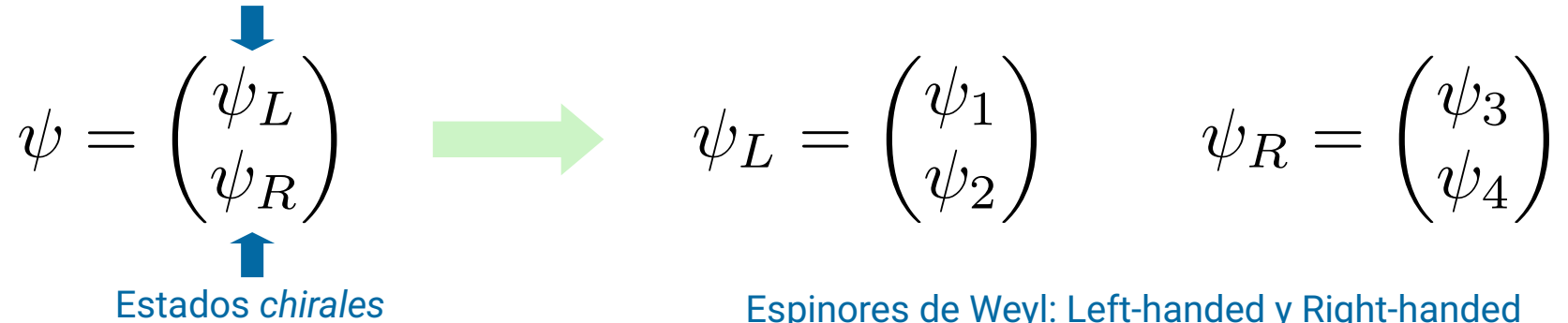
Donde:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

# Ecuación de Dirac (VII)

Esto implica que  $\psi$  es un objeto de 4 componentes:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \psi_R = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$



Estados *chirales* Espinores de Weyl: Left-handed y Right-handed

La ecuación de Dirac se escribe:

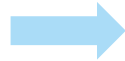
$$\begin{bmatrix} i(\sigma_0 \partial_t - \vec{\sigma} \cdot \nabla) & \sigma_0 m \\ \sigma_0 m & i(\sigma_0 \partial_t + \vec{\sigma} \cdot \nabla) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0$$

# Ecuación de Dirac (VIII)

Si la partícula no tiene masa, las ecuaciones se desacoplan:

$$i\partial_t\psi_L = i\vec{\sigma} \cdot \nabla\psi_L$$

$$i\partial_t\psi_R = -i\vec{\sigma} \cdot \nabla\psi_R$$



$$E\psi_L = -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\psi_L \quad \text{antiparalelo}$$

$$E\psi_R = \vec{\sigma} \cdot \vec{p}\psi_R \quad \text{paralelo}$$

Fermiones sin masa, no puede cambiar estado de helicidad.

En el Modelo Estandar, el neutrino es solo un espinor *Left-Handed*:  $\nu_L$

# Ecuación de Dirac (IX)

La ecuación se puede escribir de una forma **covariante**.

$$\sigma^\mu = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \qquad \tilde{\sigma}^\mu = (\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3)$$

Así:

$$i\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m\psi_R = 0$$

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m\psi_L = 0$$

Aparte de los índices de Lorentz, ahora hay índices espinoriales

# Ecuación de Dirac (X)

Volviendo a la ecuación original:

$$(i\partial_t + i\vec{\alpha} \cdot \nabla - \beta m) \psi = 0$$

y gracias a las propiedades de la matrices:

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) \psi = 0 \quad \longrightarrow \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \psi = 0$$

Cada componente del espinor cumple  
una ecuación de Klein-Gordon

# Ejercicios

- Comprobar que las matrices

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}$$

cumplen las relaciones de anticonmutación:

$$\beta^2 = \mathbb{I} \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad \{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\mathbb{I}\delta_{ij}$$

# Matrices gamma (I)

Son una colección mas compacta de las matrices  $\alpha_i, \beta$  de la ecuación de Dirac

$$\gamma^0 = \beta \quad \gamma^i = \beta \alpha_i \quad \longrightarrow \quad \gamma^\mu = (\gamma^0; \gamma^i)$$

vector contravariante

Además las matrices gamma cumple la relación:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

Esto implica que:

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{I} \quad (\gamma^i)^2 = -\mathbb{I}$$

# Matrices gamma (II)

En la **representación *chiral***, las matrices gamma se relacionan con las de Pauli

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

En la representación de Dirac, las matrices son:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

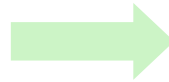


# Matrices gamma (III)

Otra matriz gamma que es muy útil es  $\gamma^5$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$$



En la rep. *chiral*

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

Nos permite escribir los operadores de proyección *chiral*:

$$P_L = \frac{1}{2} (\mathbb{I} - \gamma^5) = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_R = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$$

# Matrices gamma (IV)

Usando los proyectores sobre el espinor,  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$  se cumple:

$$P_L \psi = \psi_L$$

$$P_R \psi = \psi_R$$

Además

$$P_L^2 = P_L \quad P_R^2 = P_R \quad P_R P_L = P_L P_R = 0$$

# Ejercicios

- Mostrar que las matrices gamma cumplen las siguiente identidades:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4\mathbb{I}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu$$

- Mostrar que las representación chiral y de Dirac están relacionadas por:

$$\gamma_{\text{Dirac}}^\mu = U \gamma_{\text{chiral}}^\mu U^T$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

# Ecuación covariante de Dirac (I)

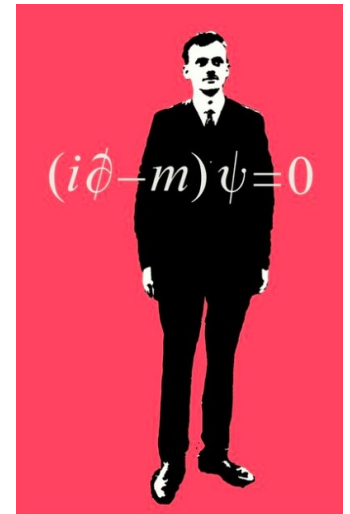
Usando estas matrices la ecuación de Dirac

$$(i\partial_t + i\vec{\alpha} \cdot \nabla - \beta m) \psi = 0$$

Se puede escribir de forma muy compacta y covariante:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$$

Ecuación de Dirac (covariante)



# Ecuación covariante de Dirac (II)

La ecuación de Dirac nos deja escribir la ecuación adjunta:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad \longrightarrow \quad i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

Donde

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$$

# Simetría interna (I)

Las ecuaciones de Dirac tienen simetrías internas que aparecen cuando son combinadas:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \quad \text{---} \quad i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$



$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0$$

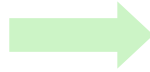
$$S^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

¡Corriente conservada!

# Simetría interna (II)

La corriente se comporta como vector de Lorentz, además:

$$S^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$



Densidad de carga

$$S^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi \sim |N|^2$$

Como el electrón tiene carga eléctrica:

$$J_{\text{EM}}^\mu = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

ya podemos intuir que la corriente para el EM tiene que ser algo así

# Ejercicios

- Usando las ecuaciones de Dirac, muestre que si:

$$\psi \sim \psi_0 e^{-ip^\mu x_\mu}$$

Entonces:

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \frac{p^\mu}{m} \bar{\psi} \psi$$



# Lagrangiano de Dirac (I)

La ecuación de Dirac es la ecuación de movimiento de un fermión.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}; \partial_\mu \psi, \partial_\mu \bar{\psi})$$

Donde las ecuaciones de movimiento, se obtienen por el principio de Hamilton

$$\delta S = \int d^4x \delta \mathcal{L} \rightarrow 0$$

# Lagrangiano de Dirac (II)

Notar que el **orden** si importa cuando se con respecto a la variaciones

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)}\delta(\partial^\mu\psi) + \delta\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} + \delta(\partial^\mu\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\bar{\psi})}$$

Diagram illustrating the order of terms in the variation of the Dirac Lagrangian. The terms are arranged as follows:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)}\delta(\partial^\mu\psi) + \delta\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} + \delta(\partial^\mu\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\bar{\psi})}$$

The variations  $\delta\psi$  and  $\delta(\partial^\mu\psi)$  are highlighted in light blue boxes. The variations  $\delta\bar{\psi}$  and  $\delta(\partial^\mu\bar{\psi})$  are highlighted in light orange boxes. The partial derivatives  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}$ ,  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)}$ ,  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}}$ , and  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\bar{\psi})}$  are highlighted in purple boxes.

# Lagrangiano de Dirac (III)

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para un fermión nos deben conducir a las ecuaciones de Dirac:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi)} \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m \bar{\psi} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\psi})} \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi = 0$$

# Lagrangiano de Dirac (IV)

El lagrangiano que nos produce las ecuaciones de movimiento correctas es:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

A veces la contracción entre un 4-vector y las matrices gamma se escribe:

$$\gamma^{\mu}a_{\mu} = \gamma_{\mu}a^{\mu} = \not{a}$$

así queda

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

# Lagrangiano de Dirac (V)

El lagrangiano debe cumplir ciertas propiedades básicas:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Escalar real

Invariante de Lorentz

Esto no quiere decir que sus componentes sean invariantes

# Invarianza de Lorentz (I)

El lagrangiano debe ser invariante de Lorentz:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{L}' = i\bar{\psi}'\gamma'_{\mu}\partial^{\mu'}\psi' - m\bar{\psi}'\psi'$$

Ante transformaciones de espacio-tiempo:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

# Invarianza de Lorentz (II)

Al transformar el espacio-tiempo, vamos a necesitar conocer como transforman:

$$\gamma^\mu \rightarrow \gamma^{\mu'}$$

$$\psi \rightarrow \psi'$$

ya que están compuestos por índices espinoriales (e índices de Lorentz).

# Invarianza de Lorentz (III)

Si consideramos que un vector de Lorentz lo podemos escribir como una matriz de 2x2:

$$X(x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$

Esta forma satisface que el determinante es invariante de Lorentz

$$\det X = x^\mu x_\mu$$



# Invarianza de Lorentz (IV)

Esta matriz se puede construir mediante la contracción con el 4-vector de Pauli:

$$X(x^\mu) = x_\mu \tilde{\sigma}^\mu = x^0 \sigma^0 + x^i \sigma^i$$

Ya que las matrices de Pauli (y la identidad) cumplen que:

$$\det \sigma_0 = 1 \quad \det \sigma_k = -1$$

# Invarianza de Lorentz (V)

La transformación de Lorentz afectará al 4-vector y a las componentes de la matriz

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \longrightarrow \quad X' = x'_{\mu} \tilde{\sigma}^{\mu}$$

ya que el determinante es invariante:

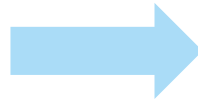
$$\det X = x^{\mu} x_{\mu} \quad \longrightarrow \quad \det X = \det X'$$

# Invarianza de Lorentz (VI)

La invarianza de los determinantes nos conduce a

$$M^\dagger X' M = X$$

$$\det M^\dagger \det X' \det M = \det X$$



$$M^\dagger M = \mathbb{I}$$

$$\det M = 1$$

matriz  
unitaria  
SU(2)

Una transformación de Lorentz es una rotación en el espacio espinorial

# Invarianza de Lorentz (VII)

Si realizamos el mismo procedimiento con

$$\tilde{X}(x^\mu) = x_\mu \sigma^\mu = x^0 \sigma^0 - x^i \sigma^i$$

El determinante es invariante de Lorentz y por lo tanto

$$N^\dagger \tilde{X}' N = \tilde{X}$$

que también es una rotación

# Invarianza de Lorentz (VIII)

Las matrices  $X, \tilde{X}$  dependen de los 4-vectores de Pauli:

$$X(x^\mu) = x_\mu \tilde{\sigma}^\mu \qquad \tilde{X}(x^\mu) = x_\mu \sigma^\mu$$

Esto nos permite establecer como los 4-vectores de Pauli transforman:

$$M^\dagger \tilde{\sigma}^\mu M = \Lambda^\mu{}_\nu \tilde{\sigma}^\nu \qquad N^\dagger \sigma^\mu N = \Lambda^\mu{}_\nu \sigma^\nu$$

$$M^\dagger M = \mathbb{I} \quad N^\dagger N = \mathbb{I} \quad M^\dagger N = \mathbb{I}$$

# Grupo $SL(2,C)$ y el grupo de Lorentz (I)

Lo que acabamos de ver es la relación que existe entre el grupo de Lorentz y el grupo  $SL(2,C)$  (Matrices 2x2 con determinante = 1).

Una transformación tipo *boost* corresponde a una matriz hermitica:

$$P = \exp \left( \frac{\theta}{2} \hat{\beta} \cdot \vec{\sigma} \right) = \cosh \left( \frac{\theta}{2} \right) \mathbb{I} + \sinh \left( \frac{\theta}{2} \right) \hat{\beta} \cdot \vec{\sigma}$$

$$\text{donde} \quad \tanh(\theta) = \beta$$

# Grupo $SL(2,C)$ y el grupo de Lorentz (II)

En una transformación general (boost y rotaciones):

$$M = PU \quad N = P^{-1}U$$

Donde  $U$  es una matriz unitaria que es responsable de las rotaciones espaciales

$$\vec{x}' = R\vec{x}$$

# Ejercicios

- Encontrar la forma de las matrices unitarias de 2x2:  $U(\vec{\theta})$  responsable de las rotaciones espaciales en el espacio espinorial.

$$X(x^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}$$

$$X'(x'^\mu) = \begin{pmatrix} x^0 + x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & x^0 - x'^3 \end{pmatrix}$$



# Invarianza del lagrangiano (I)

Una vez establecido como los 4-vectores de Pauli transforman, podemos ver el lagrangiano

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Usando los estados *chirales*:  $\psi_L, \psi_R$ , el lagrangiano se escribe:

$$\mathcal{L} = i \left( \bar{\psi}_L \gamma_{\mu} \partial^{\mu} \psi_L \right) + i \left( \bar{\psi}_R \gamma_{\mu} \partial^{\mu} \psi_R \right) - m \left( \bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L \right)$$

aquí son estados L,R de 4 componentes

# Invarianza del lagrangiano (II)

En la representación *chiral* las matrices gamma son

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto las transformaciones de Lorentz las afectan de la siguiente forma:

$$\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu = \begin{pmatrix} 0 & N^\dagger \sigma^\mu N \\ M^\dagger \tilde{\sigma}^\mu M & 0 \end{pmatrix}$$

# Invarianza del lagrangiano (III)

Para **clarificar** la notación entre un espinor de 2 o 4 componentes:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad \overline{\psi}_L = (0, \chi^\dagger) \quad \overline{\psi}_R = (\xi^\dagger, 0)$$

Ahora podemos visualizar el lagrangiano en espinores de 2 componentes:

$$\mathcal{L} = i \underbrace{(\chi^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi)}_{\substack{\text{left-handed} \\ \text{puro}}} + i \underbrace{(\xi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \xi)}_{\substack{\text{right-handed} \\ \text{puro}}} - m \underbrace{(\chi^\dagger \xi + \xi^\dagger \chi)}_{\text{mezcla}}$$

# Invarianza del lagrangiano (IV)

Al realizar una transformación de Lorentz:

$$\partial'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \partial^{\nu}$$

Los términos cinéticos quedan:

$$\chi'^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\mu} \partial'_{\mu} \chi'$$

$$\xi'^{\dagger} \sigma^{\mu} \partial'_{\mu} \xi'$$



$$\chi'^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\nu} \Lambda_{\nu}^{\mu} \partial_{\mu} \chi'$$

$$\xi'^{\dagger} \sigma^{\nu} \Lambda_{\nu}^{\mu} \partial_{\mu} \xi'$$



$$\chi'^{\dagger} M \tilde{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} M^{\dagger} \chi'$$

$$\xi'^{\dagger} N \sigma^{\mu} \partial_{\mu} N^{\dagger} \xi'$$

# Invarianza del lagrangiano (V)

Para satisfacer la invarianza de Lorentz, se debe cumplir que:

$$\chi' = M\chi \quad \xi' = N\xi$$

el término de masa transforma según:

$$\chi'^{\dagger}\xi' + \xi'^{\dagger}\chi' \implies \underbrace{\chi^{\dagger}M^{\dagger}N}_{\mathbb{I}}\xi + \xi^{\dagger}\underbrace{N^{\dagger}M}_{\mathbb{I}}\chi$$

y es invariante(!)

# Invarianza del lagrangiano (VI)

En resumen: El lagrangiano es invariante de Lorentz.

$\bar{\psi}\psi$	$\longrightarrow$	Escalar de Lorentz (invariante)
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	$\longrightarrow$	4-vector de Lorentz (contravariante)


Además (por transformaciones de paridad):

$i\bar{\psi}\gamma^5\psi$	$\longrightarrow$	Pseudoescalar
$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	$\longrightarrow$	Pseudovector

# Paridad

Ya conocemos que paridad cambia el signo de las componentes espaciales.

$$\mathcal{L} = i \left( \chi^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \right) + i \left( \xi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \xi \right) - m \left( \chi^\dagger \xi + \xi^\dagger \chi \right)$$


$$\mathcal{L} = i \left( \chi_P^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \chi_P \right) + i \left( \xi_P^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi_P \right) - m \left( \chi_P^\dagger \xi_P + \xi_P^\dagger \chi_P \right)$$

Por lo tanto:  $\chi_P = \xi$        $\xi_P = \chi$

Los estados *chirales* se intercambian

# Ejercicios

- Mostrar que:

$$i\bar{\psi}\gamma^5\psi \implies -i\bar{\psi}\gamma^5\psi \quad \text{bajo Paridad}$$

$$i\bar{\psi}\gamma^5\psi \implies i\bar{\psi}\gamma^5\psi \quad \text{bajo Lorentz}$$

- Mostrar que:

$$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \implies -\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \quad \text{bajo Paridad}$$

$$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \implies \Lambda^\nu{}_\mu \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \quad \text{bajo Lorentz}$$



# Soluciones libres de la ec. de Dirac (I)

La ec de Dirac para los estados *chirales*:

$$\begin{array}{ccc} i\tilde{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\chi - m\xi = 0 & \longrightarrow & (\partial_{\mu}\partial^{\mu} - m^2)\chi = 0 \\ i\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\xi - m\chi = 0 & & (\partial_{\mu}\partial^{\mu} - m^2)\xi = 0 \end{array}$$

Satisfacen las ecuaciones de Klein-Gordon

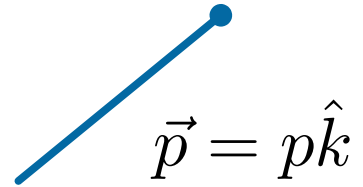
Considerando soluciones de onda plana con energía positiva:

$$E = +\sqrt{p^2 + m^2}$$

# Soluciones libres de la ec. de Dirac (II)

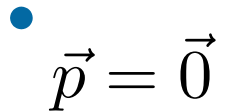
Las soluciones con energía positiva:

$$\chi(p) = \chi_0 e^{-ip_\mu x^\mu} \quad \xi(p) = \xi_0 e^{-ip_\mu x^\mu}$$



se reducen a:

$$\chi(0) = u e^{-imt} \quad \xi(0) = u e^{-imt}$$



en el **marco de referencia** que viaja con la partícula.

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}}{E}$$

# Soluciones libres de la ec. de Dirac (III)

En el marco de referencia de la partícula, las ecuaciones de movimiento no son capaces de fijar al *bi-spinor*  $u$  .

Por lo tanto:

$$u = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1 |+\rangle + u_2 |-\rangle$$

O sea, la combinación lineal de las 2 soluciones ortogonales.

# Soluciones libres de la ec. de Dirac (IV)

Tomando el caso donde:  $u_2 = 0$

$$\chi_+(0) = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \quad \xi_+(0) = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}$$

y aplicando un *boost inverso* en el eje z:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}}{E}$$

$$\chi_+(p) = M^\dagger \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \quad \xi_+(p) = N^\dagger \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}$$

# Soluciones libres de la ec. de Dirac (V)

Donde el **boost inverso**:  $\tanh \theta = \beta$

$$M^\dagger = P^{-1} = e^{-\theta/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad N^\dagger = P = e^{\theta/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y así:

$$\chi_+(p) = u_1 e^{-\theta/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}$$

$$\xi_+(p) = u_1 e^{\theta/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}$$

# Soluciones libres de la ec. de Dirac (VI)

Finalmente de vuelta en el marco de referencia inicial:

$$\chi_+(p) = u_1 e^{-\theta/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(Et-pz)} \quad \xi_+(p) = u_1 e^{\theta/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(Et-pz)}$$

Si hubiéramos considerado el otro caso:

$$\chi_-(p) = u_2 e^{\theta/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(Et-pz)} \quad \xi_-(p) = u_2 e^{-\theta/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(Et-pz)}$$

# Soluciones libres de la ec. de Dirac (VII)

Los estados  $+$  corresponden a soluciones con *helicidad positiva*.

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \xi_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(Et - pz)} \begin{pmatrix} e^{-\theta/2} |+\rangle \\ e^{\theta/2} |+\rangle \end{pmatrix}$$

4 componentes

2 componentes

$\hat{p} \cdot \vec{s} = +1$

# Soluciones libres de la ec. de Dirac (VIII)

Los estados - corresponden a soluciones con *helicidad negativa*.

$$\psi_- = \begin{pmatrix} \chi_- \\ \xi_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(Et-pz)} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} |-\rangle \\ e^{-\theta/2} |-\rangle \end{pmatrix}$$



$$\hat{p} \cdot \vec{s} = -1$$



# Helicidad (I)

Es el número cuando asociado la proyección del *spin* sobre la dirección de propagación.

$$h = \vec{\Sigma} \cdot \hat{p} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo:

$$h\psi_+ = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \xi_+ \end{pmatrix} = +1 \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \xi_+ \end{pmatrix}$$

es autoestado de helicidad y tiene autovalor +1

# Helicidad (II)

Mientras que:

$$h\psi_- = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_- \\ \xi_- \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} \chi_- \\ \xi_- \end{pmatrix}$$

es autoestado de helicidad y tiene autovalor -1

Notar que la **helicidad** no es invariante de Lorentz!

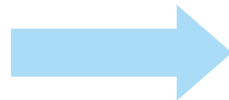
# Soluciones de energía negativa (I)

También están las soluciones de energía negativa:  $E = -\sqrt{p^2 + m^2}$

Que van a corresponder a las soluciones de **antipartículas**

$$i\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \tilde{\chi} - m\tilde{\xi} = 0$$

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \tilde{\xi} - m\tilde{\chi} = 0$$



$$\tilde{\chi}(p) = \tilde{\chi}_0 e^{ip_\mu x^\mu}$$

$$\tilde{\xi}(p) = \tilde{\xi}_0 e^{ip_\mu x^\mu}$$

# Soluciones de energía negativa (II)

En el marco de referencia de la **antipartícula**:

$$\tilde{\chi}(0) = v e^{imt} \quad \tilde{\xi}(0) = -v e^{imt}$$

Donde al igual que antes:

$$v = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 |+\rangle + v_2 |-\rangle$$

# Soluciones de energía negativa (III)

Donde las soluciones en el marco de referencia inicial:


$$\tilde{\psi}_+ = \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_+ \\ \tilde{\xi}_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(Et-pz)} \begin{pmatrix} e^{\theta/2} |+\rangle \\ -e^{-\theta/2} |+\rangle \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\psi}_- = \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_- \\ \tilde{\xi}_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(Et-pz)} \begin{pmatrix} -e^{\theta/2} |-\rangle \\ e^{-\theta/2} |-\rangle \end{pmatrix}$$

# Grados de libertad de las soluciones

La ecuación de Dirac vincula las 4 componentes del *spinor*.

Las soluciones libres corresponde a 4 posibles estados de partículas:



Partícula  
helicidad +1

Partícula  
helicidad -1

Antipartícula  
helicidad +1

Antipartícula  
helicidad -1

# Simetría interna del lagrangiano (I)

Volviendo a estudiar el lagrangiano de Dirac,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Vemos que es invariante ante cambios de fases globales.

$$\psi' = e^{i\theta}\psi$$

así podemos buscar la corriente de Noëther asociada!

# Simetría interna del lagrangiano (II)

Volviendo a estudiar el lagrangiano de Dirac,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Vemos que es invariante ante cambios de fases globales.

$$\psi' = e^{i\theta}\psi$$

así podemos buscar la corriente de Noëther asociada!



# Simetría interna del lagrangiano (III)

La variación del lagrangiano en cada uno de los campos, nos lleva a la derivada total:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} \delta\psi + \delta\bar{\psi} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \right)$$

y como:

$$\delta\psi = \psi (i\delta\theta)$$

$$\delta\bar{\psi} = \bar{\psi} (-i\delta\theta)$$

# Simetría interna del lagrangiano (IV)

Finalmente:

$$\delta\mathcal{L} = -2\partial_\mu (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \delta\theta \rightarrow 0$$

Así recuperamos la **corriente conservada** obtenida de las ecuaciones de Dirac:

$$S^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu S^\mu = 0$$

La corriente conservada es consecuencia de la simetría U(1) global

# Ejercicios

Muestre que el siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = i (\chi^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi) + i (\xi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \xi) - m \chi^\dagger \xi - m^* \xi^\dagger \chi$$

puede ser transformado en:

$$\mathcal{L} = i (\chi^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi) + i (\xi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \xi) - m(\chi^\dagger \xi + \xi^\dagger \chi)$$

usando una refase asimétrico en los campos:  $\chi, \xi$

DAFI-02255

# Introducción a la Física de Partículas

<https://robertolineros.com/teaching/fisica-de-particulas/>





Universidad Católica del Norte  
Departamento de Física

**DAFI-02255**

# Introducción a la Física de Partículas

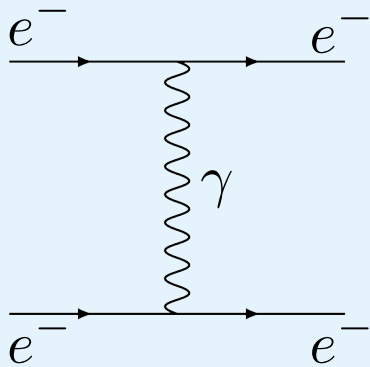
**Roberto Lineros**

**Segundo Semestre 2020**

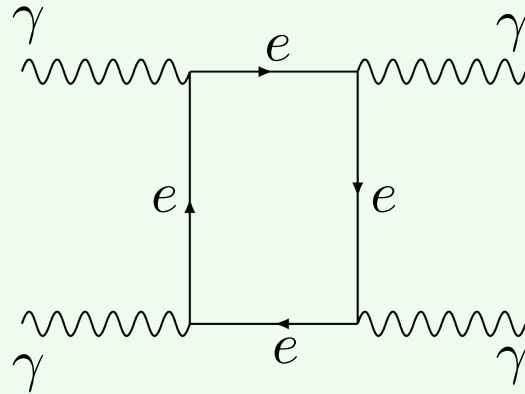
<https://robertolinerros.com/teaching/fisica-de-particulas/>

# Electrodinámica (I)

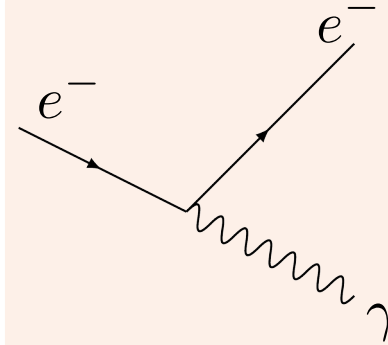
La electrodinámica reúne en una formulación la dinámica del campo electromagnético, partículas cargadas, e interacciones.



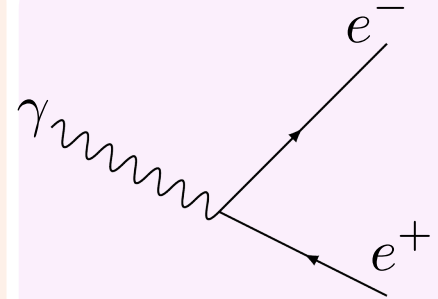
interacción entre  
partículas cargadas



interacción entre  
fotones



emisión de fotones



creación de pares

# Electrodinámica (II)

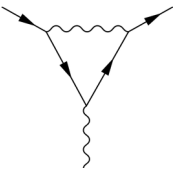
La electrodinámica cuántica (QED) es una de las teorías cuánticas de campo que explica con precisión impresionante observables relacionados con el electrón.

## Momento dipolar anómalo del electrón:

Ec de Dirac:  $a_e = 0$

QED:  $a_e = 0.001\,159\,652\,181\,643(764)$

Valor experimental:  $a_e = 0.001\,159\,652\,180\,73(28)$



Experimento y Teoría concuerdan en 10 cifras significativas!!!

# Electrodinámica de fermiones QED (I)

Habíamos visto que el lagrangiano del campo fermiónico es invariante U(1) global:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

$$\psi' = e^{i\theta}\psi$$

y que debido a esa simetría tenía una corriente de Noëther conservada:

$$S^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$$

$$\partial_{\mu}S^{\mu} = 0$$



# Electrodinámica de fermiones QED (II)

Al incluir el lagrangiano EM y la interacción via la derivada covariante:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}D^{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Donde  $D^{\mu} = \partial^{\mu} - iqA^{\mu}$

Vemos que este lagrangiano sigue siendo invariante U(1) global

$$S^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \quad \text{se sigue conservando}$$

# Electrodinámica de fermiones QED (III)

La derivada covariante nos produce un término de fuente de campo EM

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + q\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi A^{\mu}$$

$-J_{\mu}A^{\mu}$

así que:  $J^{\mu} = -q S^{\mu}$  es una corriente de partículas/antipartículas cargadas

Complementariamente la simetría de Gauge implica

$$\partial_{\mu}J^{\mu} = 0$$

conservación de carga eléctrica

# Electrodinámica de fermiones QED (IV)

Al considerar transformaciones U(1) local:  $\psi' = e^{i\theta(x)}\psi$

El lagrangiano es invariante solo si la conectamos con la simetría de gauge del EM:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}D^{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Las transformaciones corresponden a:

$$\psi' = e^{i\theta}\psi$$
$$A'^{\mu} = A^{\mu} + \frac{1}{q}\partial^{\mu}\theta$$

# Ejercicios

Mostrar que para las soluciones de energía positiva y negativa de la ecuación de Dirac, la corriente corresponde a:

$$j_{\text{EM}}^{\mu} = -qS^{\mu} = -qE/m(1, 0, 0, \beta)$$

para es una partícula/antipartícula moviéndose en el eje-z.

# Vértices en electrodinámica

Al expandir el lagrangiano, vemos que solo existe un término con 3 campos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Dirac, libre}} + \mathcal{L}_{\text{Gauge, libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = q A^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad \longrightarrow \quad A^\mu \text{ wavy line } \begin{cases} \nearrow \psi \\ \searrow \bar{\psi} \end{cases}$$
A Feynman diagram representing an interaction vertex. On the left, a wavy line labeled  $A^\mu$  represents an incoming photon. This line splits into two outgoing lines: an upper line labeled  $\psi$  representing an outgoing fermion, and a lower line labeled  $\bar{\psi}$  representing an outgoing antifermion. Arrows on the fermion lines indicate the direction of particle flow.

# Conjugación de carga (I)

Ya habíamos visto el concepto de conjugación de carga, cuando vimos las ecuaciones de Maxwell:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$$

Donde la **conjugación de carga** cambiaba de signo la corriente y el campo

$$C[J^\mu] = J^{c\mu} = -J^\mu$$

$$C[A^\mu] = A^{c\mu} = -A^\mu$$

# Conjugación de carga (II)

Así se mantiene el lagrangiano EM invariante:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{L}^c = -\frac{1}{4}F^{c\mu\nu}F_{\mu\nu}^c - J^{c\mu}A_\mu^c$$

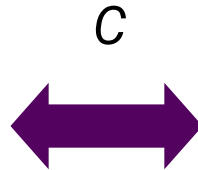
¿Qué sucede en el caso de QED?

# Conjugación de carga en QED (I)

La conjugación de carga para un *espinor* se va a relacionar con cambiar una **partícula** por su **antipartícula**:

$$\psi = \psi_0 e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

Estado energía positiva



$$\psi^* = \psi_0^* e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

Estado energía negativa



# Conjugación de carga en QED (II)

La fuente de corriente EM va a estar asociada a la corriente conservada en electrodinámica:

$$J^\mu = -q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad \longrightarrow \quad J^{c\mu} = -J^\mu$$

pero no sabemos como afecta la conjugación de carga al campo fermiónico.

Si consideramos al ecuación de Dirac:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi = 0$$

y la conjugamos

# Conjugación de carga en QED (III)

$$(-i\gamma^{*\mu}(\partial_\mu + iqA_\mu) - m)\psi^* = 0$$

Usando la representación *chiral* de las matrices gamma.

$$\begin{array}{ll} \gamma^{0*} = \gamma^0 & \gamma^{1*} = \gamma^1 \\ \gamma^{2*} = -\gamma^2 & \gamma^{3*} = \gamma^3 \end{array}$$

vemos que **no** vamos a obtener una ecuación con la forma de la ec de Dirac.

# Conjugación de carga en QED (IV)

Las reglas de anticonmutación para las matrices gamma, nos indican que:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad \longleftrightarrow \quad \{\gamma_\mu^*, \gamma_\nu^*\} = 2g_{\mu\nu}$$

Entonces:

$$\gamma_2^* \gamma_\mu^* = -\gamma_\mu^* \gamma_2^* \quad \mu \neq 2$$

$$\gamma_2^* \gamma_2^* = \gamma_2^* \gamma_2^*$$

de esta forma se contrarresta el cambio de signo por conjugar

# Conjugación de carga en QED (V)

Así se obtiene que:

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m) (-i\gamma^2\psi^*) = 0$$

Al considerar la conjugación de carga del campo EM:  $A^{c\mu} = -A^\mu$

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu^c) - m) \psi^c = 0$$

Se obtiene la ecuación de Dirac si el campo :

$$\psi^c = -i\gamma^2\psi^*$$

# Conjugación de carga en QED (VI)

Esta construcción nos permite ver que:

$$\overline{\psi}\psi = \overline{\psi^c}\psi^c$$

y

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi = -\overline{\psi^c}\gamma^\mu\psi^c$$

# Ejercicios

Identificar la operación de conjugación de carga para el caso de la electrodinámica de campos escalares SQED.

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

# Conjugación sobre estados *chirales*

Si consideramos el espinor por sus componentes *chirales*:  $\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \xi \end{pmatrix}$

El conjugado de carga del espinor sería:  $\psi^c = \begin{pmatrix} \chi^c \\ \xi^c \end{pmatrix}$

Lo que nos da que el conjugado de carga relaciona los estados *chirales* opuestos

$$\begin{pmatrix} \chi^c \\ \xi^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^* \\ \xi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \xi^* \\ i\sigma^2 \chi^* \end{pmatrix}$$

# Fermiones de Majorana

Los espinores de Majorana cumplen la propiedad de ser su **propia antipartículas**

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \chi^c \end{pmatrix} \longleftrightarrow \psi^c = \begin{pmatrix} \chi \\ \chi^c \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \overline{\psi^c} \gamma_\mu \partial^\mu \psi - \frac{m}{2} \overline{\psi^c} \psi$$

Los neutrinos (masivos) se esperan que sean del tipo majorana



Ettore Majorana



# Conjugación y los estados barrados

La formulación mas común de la conjugación de carga es mediante los espinores barra, tal que:

$$\psi^c = C \bar{\psi}^T$$

$C$  es el operador conjugación de carga

Este objeto cumple las siguientes propiedades:

$$C^T = C^\dagger = C^{-1} = -C$$
$$C^{-1} \gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T$$

En la representación *chiral* corresponde a:

$$C = -i\gamma^2\gamma^0$$

# Ejercicios

Mostrar las siguiente propiedades de la conjugación de carga:

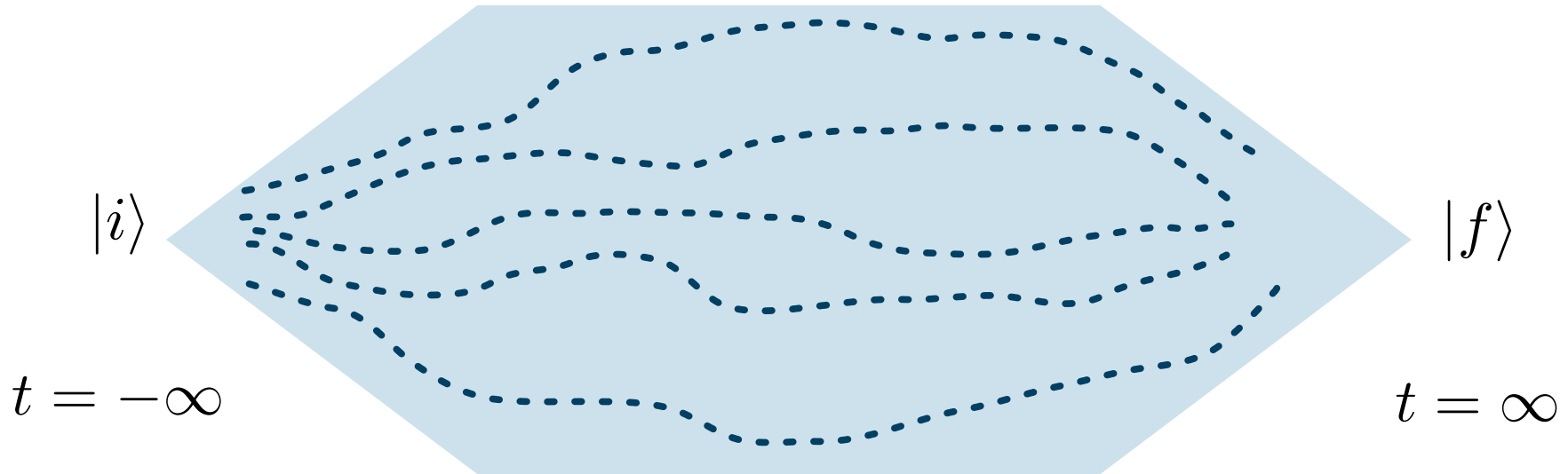
$$(\psi^c)^c = \psi$$

$$\overline{\psi}\psi = \overline{\psi^c}\psi^c$$

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi = -\overline{\psi^c}\gamma^\mu\psi^c$$

# Interacciones (I)

La interacción entre campos es lo que hace posible que sucedan los procesos que existen en el Universo.



## Interacciones (II)

El proceso donde el estado inicial evoluciona al estado final corresponde a una transición donde:

$$|f\rangle = S|i\rangle$$

con S el operador: **Matriz-S** o **Matriz de scattering**

$$S^\dagger S = S S^\dagger = \mathbb{1}$$

# Interacciones (III)

En el scattering:

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

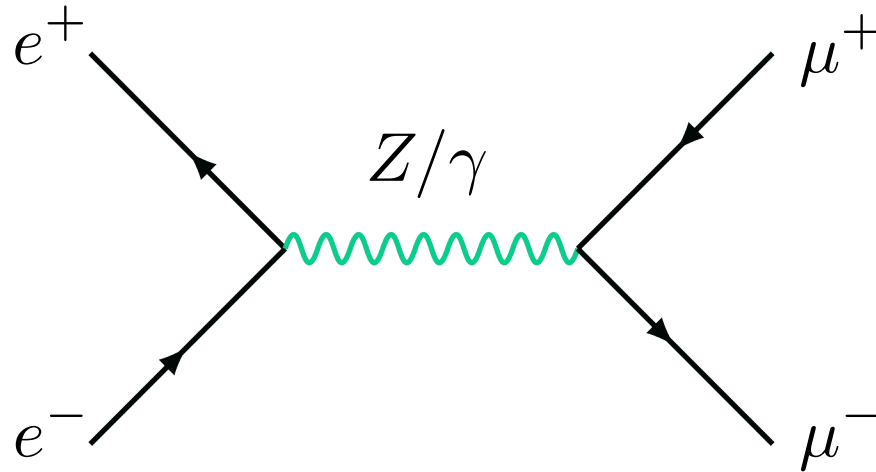
el estado inicial sería:

$$|i\rangle = |e^-, p_1^\mu, s_1\rangle |e^+, p_2^\mu, s_2\rangle$$

y el estado final:

$$|f\rangle = |\mu^-, p_3^\mu, s_3\rangle |\mu^+, p_4^\mu, s_4\rangle$$

# Interacciones (IV)



así el proceso se describe en términos de la matriz-S, pero es mas fácil de visualizar con los diagramas de Feynman.

# Transiciones (I)

En mecánica cuántica, un estado evoluciona según el operador de evolución temporal:

$$\langle \alpha_f(t_1) | U(t_1, t_0) | \alpha_i(t_0) \rangle$$

Para partículas, los estados iniciales y finales son estados libres en infinito:

$$S_{fi} = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t_1 \rightarrow +\infty}} \langle \alpha_f(t_1) | U(t_1, t_0) | \alpha_i(t_0) \rangle$$

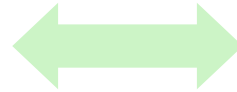
elemento de la Matriz-S

# Transiciones (II)

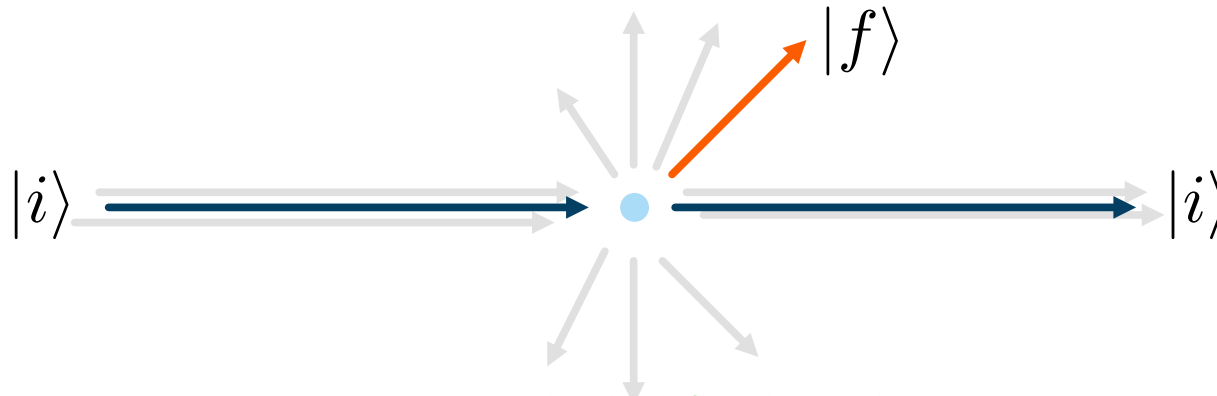
En principio la matriz-S también incluyen los procesos donde nada sucede:

$$S = \mathbb{1} + i\mathcal{T}$$

Matriz de transferencia



$$\langle f|S|i\rangle = \delta_{fi} + i\mathcal{T}_{fi}$$





# Transiciones (III)

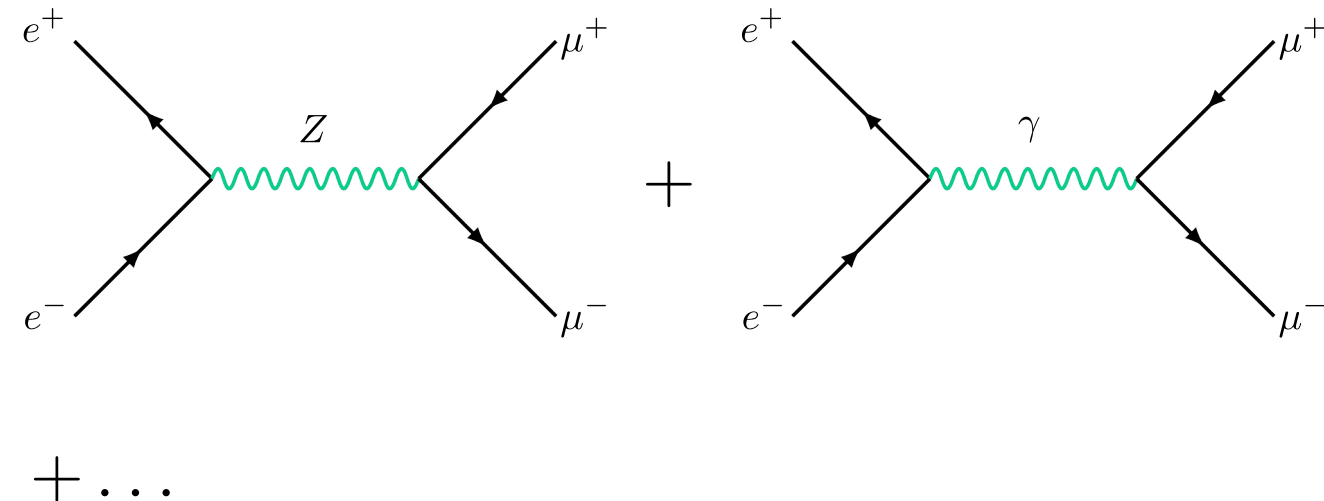
La matriz-S es proporcional a la amplitud de *Scattering* en el espacio de momentum:

$$\langle f | S - \mathbb{1} | i \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \mathcal{M}_{fi}$$

La delta de Dirac en 4-D se encarga de la conservación de 4-momento

# Amplitud de scattering (I)

La amplitud de *scattering* considera los posibles caminos que nos llevan de un estado al otro.

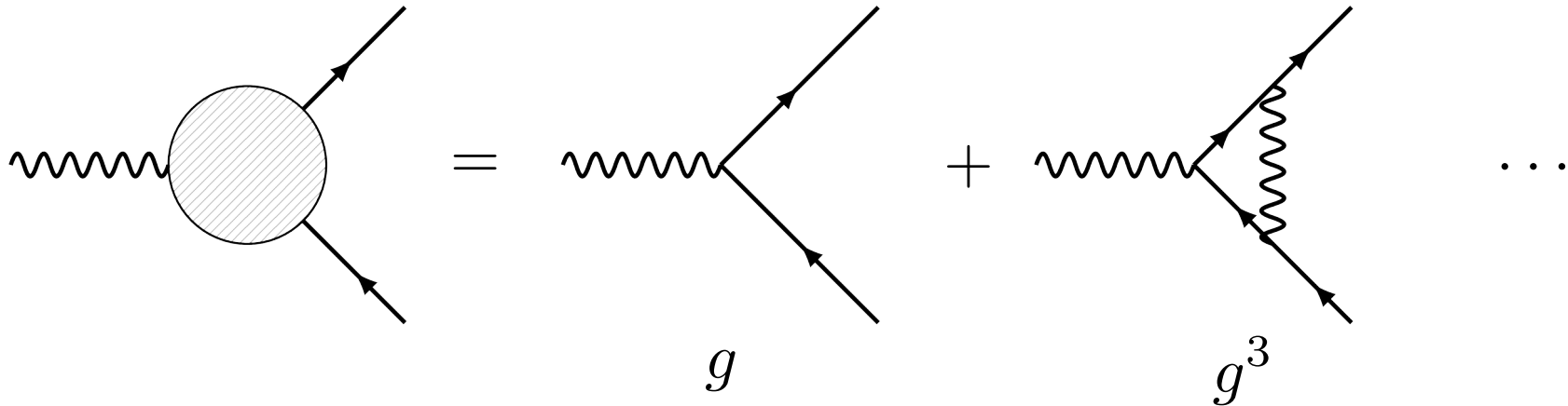
$$\mathcal{M}_{\text{total}} =$$


The diagram shows two Feynman diagrams for the process  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . The first diagram shows an incoming  $e^+$  and  $e^-$  meeting at a vertex, with a wavy line labeled  $Z$  connecting to another vertex where an outgoing  $\mu^+$  and  $\mu^-$  meet. The second diagram is identical but the wavy line is labeled  $\gamma$ . The two diagrams are separated by a plus sign, and the entire expression is followed by  $+ \dots$ .

# Amplitud de scattering (II)

Así la amplitud total es la suma de varias amplitudes, pesadas por la potencia de los acoplamientos:

$$\mathcal{M}_{\text{total}} = \sum_k g_k^n \mathcal{M}_k$$



# Teoría de perturbaciones (I)

En mecánica cuántica, el hamiltoniano total incluye las interacciones así:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = (H_0 + V)\psi$$

$$\psi(t_1) = e^{-iH(t_1-t_0)}\psi(t_0)$$

Pero el hamiltoniano libre puede ser resuelto por soluciones de onda plana:

$$H_0\phi_n = E_n\phi_n$$

$$\int \phi_m^*(x)\phi_n(x)d^3x = \delta_{mn}$$

# Teoría de perturbaciones (II)

La solución se puede encontrar en términos de la solución libre:

$$\psi(t, \vec{x}) = \sum_n a_n(t) \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t}$$

de tal forma que:

$$\frac{\partial a_f}{\partial t} = -i \sum_n a_n \left( \int \phi_f^* V \phi_n d^3x \right) e^{-i(E_n - E_f)t}$$

# Teoría de perturbaciones (III)

Considerando que la interacción esta activa un tiempo  $T$ , y que iniciamos de un modo puro:  $a_n = \delta_{in}$

La amplitud de transición:

$$T_{fi} = a_f(T) = -i \int_{-T/2}^{T/2} dt \left( \int \phi_f^* V \phi_i d^3x \right) e^{i(E_f - E_i)t}$$

de forma más compacta:

$$T_{fi} = -i \int \phi_f^* V \phi_i d^4x$$

(si todo depende del tiempo)

# Teoría de perturbaciones (IV)

Si la interacción es independiente del tiempo, entonces al integrar sobre todo el tiempo

$$T_{fi} = -i \left( \int \phi_f^* V \phi_i d^3x \right) \left( \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E_f - E_i)t} dt \right)$$

En el límite  $T \rightarrow \infty$  la amplitud corresponde:

$$T_{fi} = -i \left( \int \phi_f^* V \phi_i d^3x \right) 2\pi \delta(E_f - E_i)$$

$$T_{fi} = -i V_{fi} 2\pi \delta(E_f - E_i)$$

# Teoría de perturbaciones (V)

La tasa de transición o probabilidad por unidad de tiempo:

$$W_{fi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T}$$

Entonces

$$W_{fi} = 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i)$$



# Amplitud en SQED (I)

En la electrodinámica de campos escalares, el langrangiano es:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

donde la interacción entre campos se da en los términos de la derivada covariante

$$D^\mu = \partial^\mu - iqA^\mu$$

# Amplitud en SQED (II)

Separando los términos de interacción:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

se obtiene:

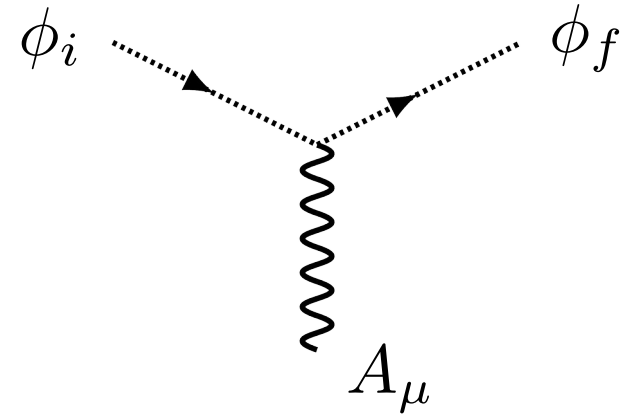
$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -iqA^\mu (\partial_\mu \phi^* \phi - \phi^* \partial_\mu \phi) - q^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi$$

# Amplitud en SQED (III)

El lagrangiano de interacción sería equivalente al potencial:  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$

Si consideramos solo el vértice de 3 patas, para analizar la amplitud de transición:

$$T_{fi} = -i \int d^4x \phi_f^* \hat{V} \phi_i$$



# Amplitud en SQED (IV)

$$T_{fi} = -i \int d^4x (iq) A^\mu (\partial_\mu \phi_f^* \phi_i - \phi_f^* \partial_\mu \phi_i)$$

Al desarrollar la amplitud de transición considerando que los estados inicial y final son ondas planas:

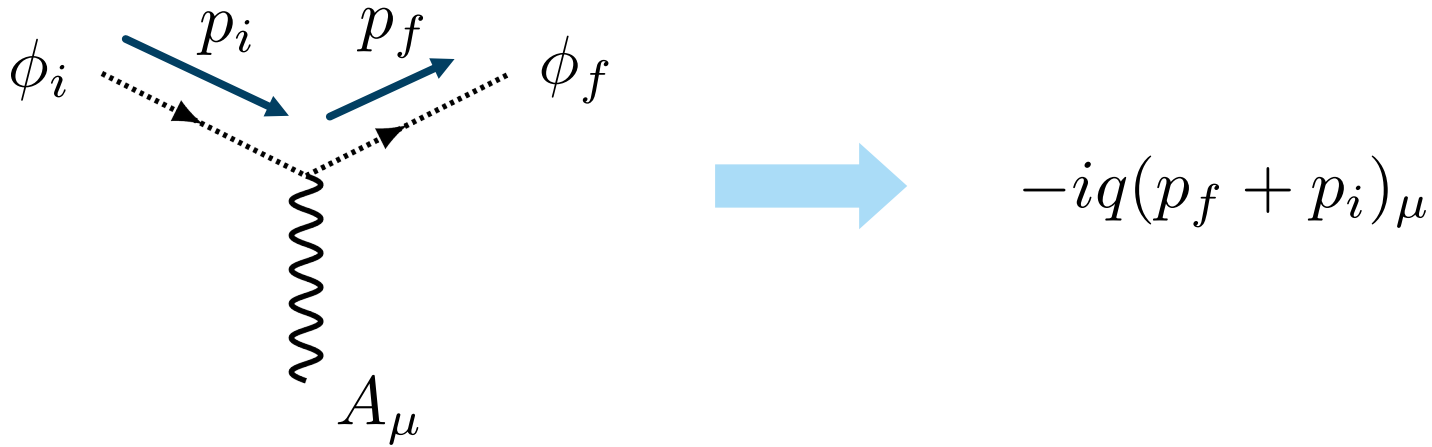
$$\phi_i = N_i e^{-ip_i x} \quad \phi_f = N_f e^{-ip_f x}$$

$$T_{fi} = -i \int d^4x \phi_f^* [-q(p_f + p_i)]_\mu \phi_i A^\mu$$

$$T_{fi} = -i \int d^4x N_f^* N_i [-q(p_f + p_i)]_\mu e^{i(p_f - p_i)x} A^\mu$$

# Amplitud en SQED (V)

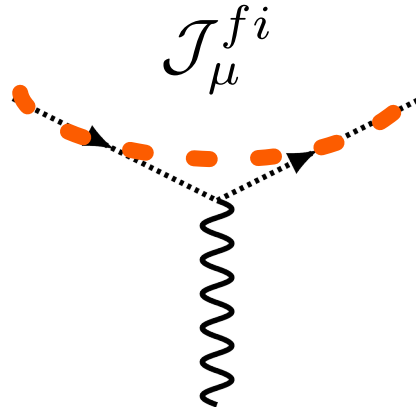
Así tenemos lo que se conoce como regla de Feynman:



# Amplitud de scattering in SQED (I)

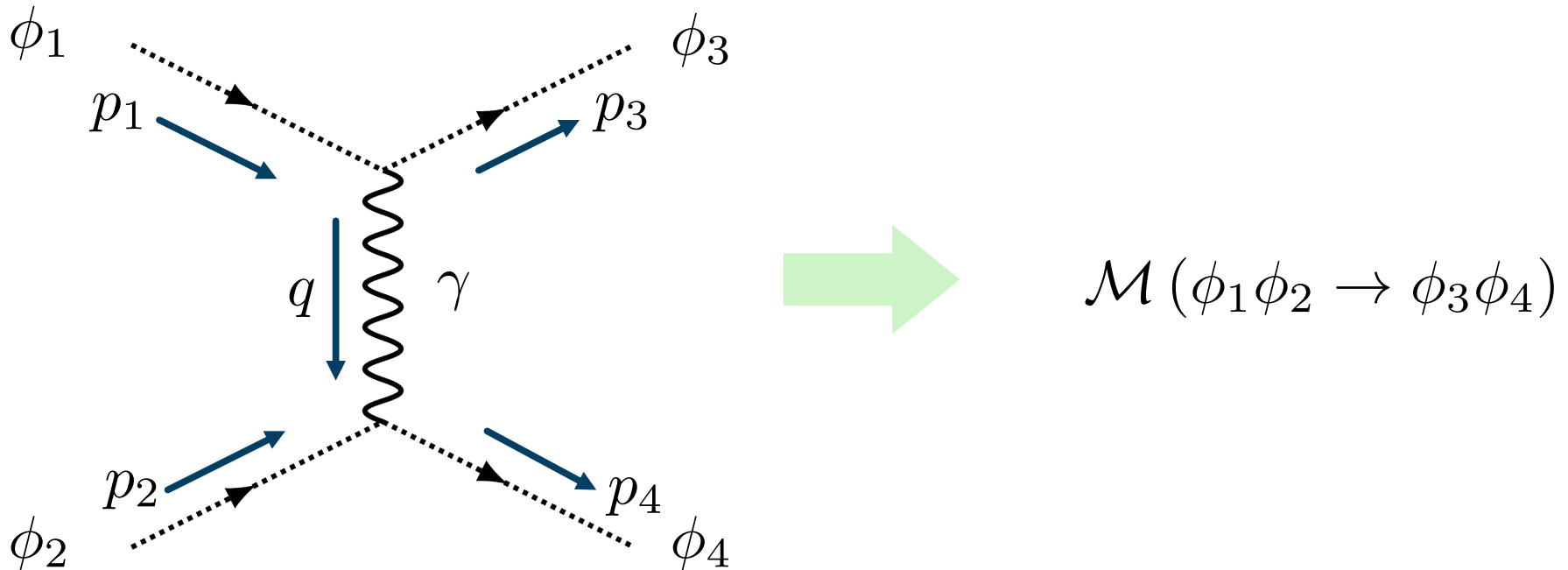
Notemos que la amplitud de transición tiene a la corriente conservada del campo escalar complejo:

$$T_{fi} = -i \int d^4x A^\mu \mathcal{J}_\mu^{fi} \qquad \mathcal{J}_\mu^{fi} = iq (\phi_i \partial_\mu \phi_f^* - \phi_f^* \partial_\mu \phi_i)$$



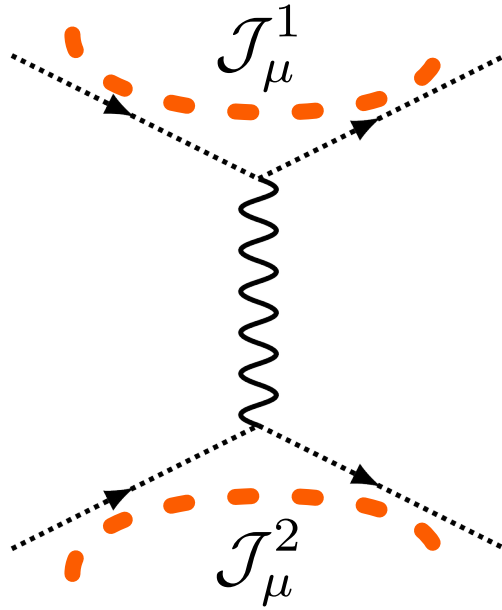
# Amplitud de scattering in SQED (II)

Vamos a calcular la amplitud del scattering entre 2 escalares a 2 escalares:



# Amplitud de scattering in SQED (III)

El diagrama lo podemos interpretar como 2 corrientes conectadas por el fotón.



$$T = -i \int d^4x A^\mu \mathcal{J}_\mu^1$$

por otro lado el campo EM que percibe  $J^1$  viene de  $J^2$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mathcal{J}^{2\nu} \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mathcal{J}^{2\nu}$$



# Amplitud de scattering in SQED (IV)

En el espacio de momentum, la ecuación para el campo EM corresponde a:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mathcal{J}^{2\nu} \quad \longrightarrow \quad \tilde{A}^\nu = -\frac{1}{q^2} \tilde{J}^{2\nu}$$

$$T = -i \int d^4x \mathcal{J}_\mu^1 \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2} \mathcal{J}_\nu^2$$

donde

$$q = p_2 - p_4$$

# Amplitud de scattering in SQED (V)

Como las patas externas son ondas planas:  $\phi_l = N_l e^{-ip_l \cdot x}$

$$\begin{aligned} T = & -i \int d^4x \left( N_1 N_3^* [-q(p_1 + p_3)_\mu] e^{i(p_3 - p_1) \cdot x} \right) \\ & \times \left[ \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2} \right] \\ & \times \left( N_2 N_4^* [-q(p_2 + p_4)_\nu] e^{i(p_4 - p_2) \cdot x} \right) \end{aligned}$$

# Amplitud de scattering in SQED (VI)

La integral en  $x$  sobre la exponencial corresponde a una delta de Dirac.

$$\int d^4x e^{iP \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^4(P)$$

$$T = -i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) N_1 N_2 N_3^* N_4^* \\ [-q(p_1 + p_3)_\mu] \left[ \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2} \right] [-q(p_2 + p_4)_\nu]$$

# Amplitud de scattering in SQED (VII)

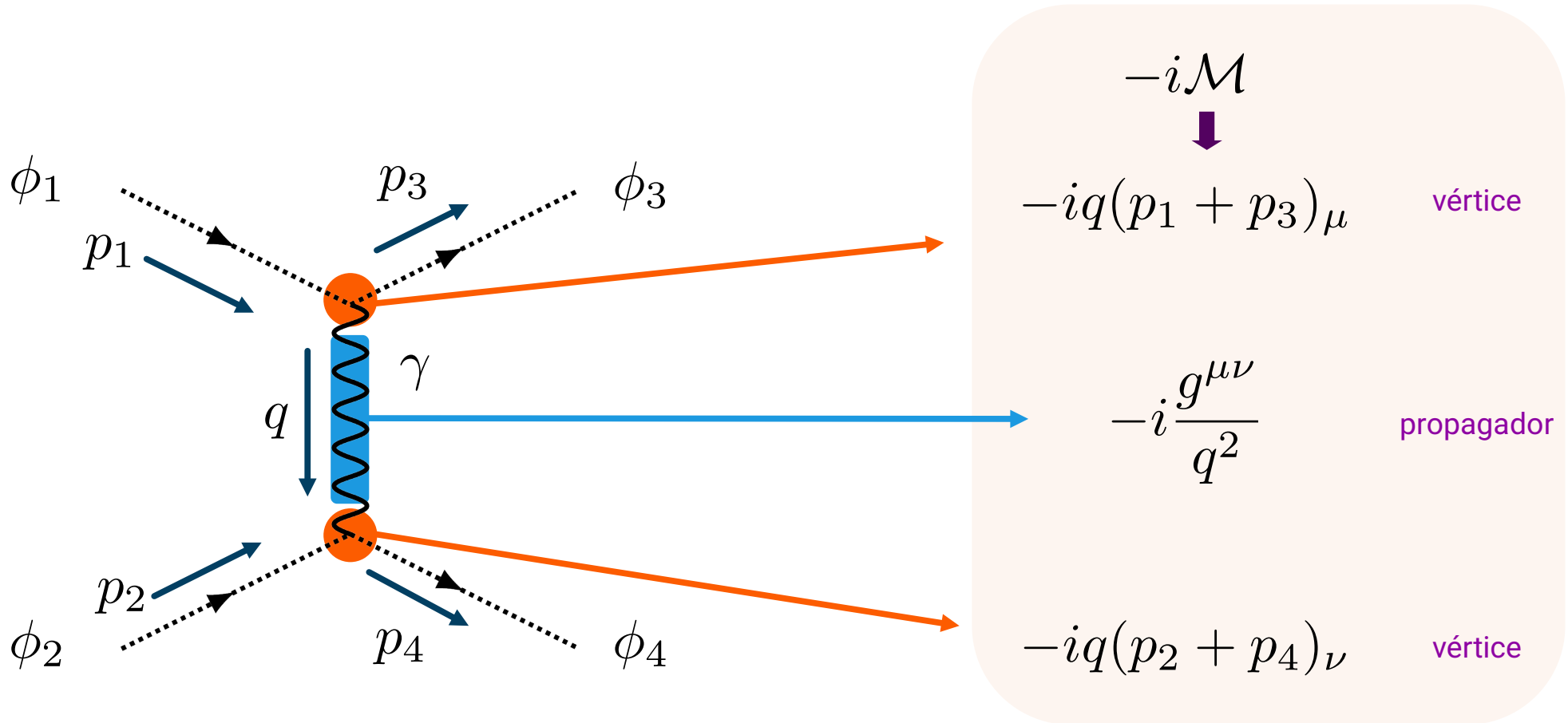
$$T = -i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) N_1 N_2 N_3^* N_4^* \\ [-q(p_1 + p_3)_\mu] \left[ \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2} \right] [-q(p_2 + p_4)_\nu]$$

$$T = -i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) N_1 N_2 N_3^* N_4^* \mathcal{M}$$

La amplitud de scattering corresponde a:

$$-i\mathcal{M} = [-iq(p_1 + p_3)_\mu] \left[ -i \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \right] [-iq(p_2 + p_4)_\nu]$$

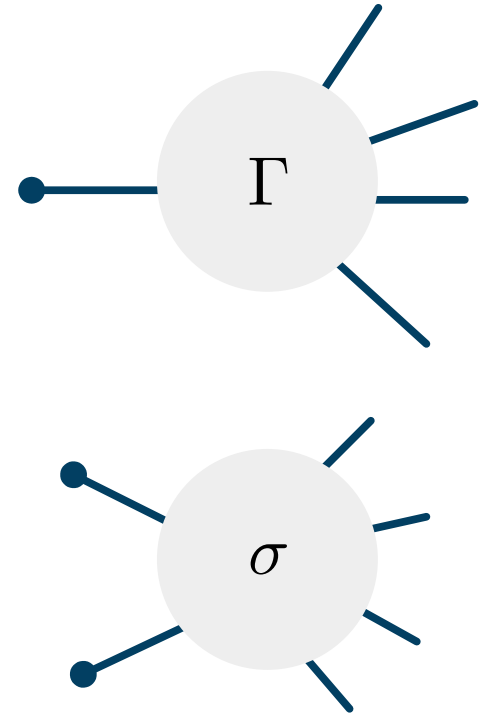
# Amplitud de scattering in SQED (VIII)



# Observables en física de partículas

Los observables mas utilizados son:

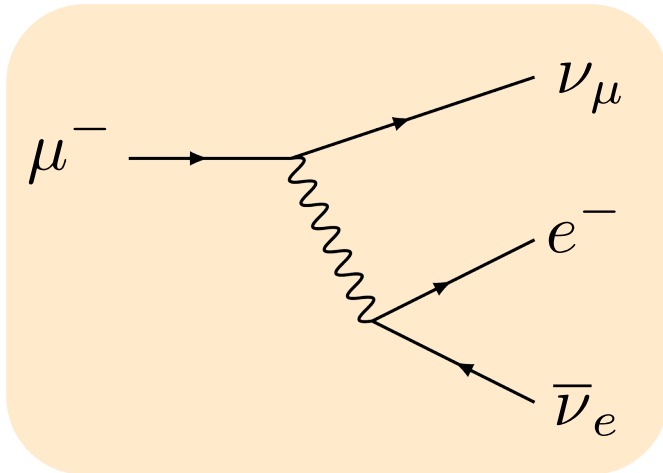
- Tasa de decaimiento o desintegración
- Sección eficaz o de dispersión



# Tasa de decaimiento (I)

La desintegración corresponde al caso cuando un estado cuántico se desintegra en otros.

Ocurre solo si las condiciones de **energía-momentun** se satisfacen y si las **simetrías** lo permiten.



por ejemplo la **desintegración del muón**

# Tasa de decaimiento (II)

$\mu$

$$J = \frac{1}{2}$$

Mass  $m = 0.1134289257 \pm 0.0000000025$  u

Mass  $m = 105.6583745 \pm 0.0000024$  MeV

Mean life  $\tau = (2.1969811 \pm 0.0000022) \times 10^{-6}$  s

$\tau_{\mu^+}/\tau_{\mu^-} = 1.00002 \pm 0.00008$

$c\tau = 658.6384$  m

Magnetic moment anomaly  $(g-2)/2 = (11659209 \pm 6) \times 10^{-10}$

$(g_{\mu^+} - g_{\mu^-}) / g_{\text{average}} = (-0.11 \pm 0.12) \times 10^{-8}$

Electric dipole moment  $|d| < 1.8 \times 10^{-19}$  e cm, CL = 95%

## Decay parameters [b]

$\rho = 0.74979 \pm 0.00026$

$\eta = 0.057 \pm 0.034$

$\delta = 0.75047 \pm 0.00034$

$\xi P_{\mu} = 1.0009^{+0.0016}_{-0.0007}$  [c]

$\xi P_{\mu} \delta / \rho = 1.0018^{+0.0016}_{-0.0007}$  [c]

$\xi' = 1.00 \pm 0.04$

$\xi'' = 0.98 \pm 0.04$

$\alpha/A = (0 \pm 4) \times 10^{-3}$

$\alpha'/A = (-10 \pm 20) \times 10^{-3}$

$\beta/A = (4 \pm 6) \times 10^{-3}$

$\beta'/A = (2 \pm 7) \times 10^{-3}$

$\bar{\eta} = 0.02 \pm 0.08$

Citation: P.A. Zyla *et al.* (Particle Data Group), Prog. Theor. Exp. Phys. **2020**, 083C01 (2020)

$\mu^+$  modes are charge conjugates of the modes below.

$\mu^-$ DECAY MODES	Fraction ( $\Gamma_i/\Gamma$ )	Confidence level	$p$ (MeV/c)
$e^- \bar{\nu}_e \nu_{\mu}$	$\approx 100\%$		53
$e^- \bar{\nu}_e \nu_{\mu} \gamma$	[d] $(6.0 \pm 0.5) \times 10^{-8}$		53
$e^- \bar{\nu}_e \nu_{\mu} e^+ e^-$	[e] $(3.4 \pm 0.4) \times 10^{-5}$		53
<b>Lepton Family number (LF) violating modes</b>			
$e^- \nu_e \bar{\nu}_{\mu}$	LF [f] $< 1.2$	%	90% 53
$e^- \gamma$	LF $< 4.2$	$\times 10^{-13}$	90% 53
$e^- e^+ e^-$	LF $< 1.0$	$\times 10^{-12}$	90% 53
$e^- 2\gamma$	LF $< 7.2$	$\times 10^{-11}$	90% 53

La desintegración del muón nos sirve para estudiar el comportamiento de las interacciones electrodébiles



# Tasa de decaimiento (III)

**P**

$$I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$$

Mass  $m = 1.00727646662 \pm 0.00000000009$  u ( $S = 3.1$ )

Mass  $m = 938.272081 \pm 0.000006$  MeV [ $a$ ]

$|m_p - m_{\bar{p}}|/m_p < 7 \times 10^{-10}$ , CL = 90% [ $b$ ]

$|\frac{q_p}{m_p} - \frac{q_{\bar{p}}}{m_{\bar{p}}}|/(\frac{q_p}{m_p}) = 1.00000000000 \pm 0.00000000007$

$|q_p + q_{\bar{p}}|/e < 7 \times 10^{-10}$ , CL = 90% [ $b$ ]

$|q_p + q_e|/e < 1 \times 10^{-21}$  [ $c$ ]

Magnetic moment  $\mu = 2.7928473446 \pm 0.0000000008$   $\mu_N$

$(\mu_p + \mu_{\bar{p}})/\mu_p = (0.002 \pm 0.004) \times 10^{-6}$

Electric dipole moment  $d < 0.021 \times 10^{-23}$  e cm

Electric polarizability  $\alpha = (11.2 \pm 0.4) \times 10^{-4}$  fm<sup>3</sup>

Magnetic polarizability  $\beta = (2.5 \pm 0.4) \times 10^{-4}$  fm<sup>3</sup> ( $S = 1.2$ )

Charge radius,  $\mu p$  Lamb shift =  $0.84087 \pm 0.00039$  fm [ $d$ ]

Charge radius =  $0.8409 \pm 0.0004$  fm [ $d$ ]

Magnetic radius =  $0.851 \pm 0.026$  fm [ $e$ ]

Mean life  $\tau > 3.6 \times 10^{29}$  years, CL = 90% [ $f$ ] ( $p \rightarrow$  invisible mode)

Mean life  $\tau > 10^{31}$  to  $10^{33}$  years [ $f$ ] (mode dependent)

See the "Note on Nucleon Decay" in our 1994 edition (Phys. Rev. **D50**, 1173) for a short review.

The "partial mean life" limits tabulated here are the limits on  $\tau/B_i$ , where  $\tau$  is the total mean life and  $B_i$  is the branching fraction for the mode in question. For  $N$  decays,  $p$  and  $n$  indicate proton and neutron partial lifetimes.

$p$ DECAY MODES	Partial mean life (10 <sup>30</sup> years)	Confidence level	$p$ (MeV/c)
<b>Antilepton + meson</b>			
$N \rightarrow e^+ \pi$	$> 5300$ ( $n$ ), $> 16000$ ( $p$ )	90%	459
$N \rightarrow \mu^+ \pi$	$> 3500$ ( $n$ ), $> 7700$ ( $p$ )	90%	453
$N \rightarrow \nu \pi$	$> 1100$ ( $n$ ), $> 390$ ( $p$ )	90%	459
$p \rightarrow e^+ \eta$	$> 10000$	90%	309
$p \rightarrow \mu^+ \eta$	$> 4700$	90%	297
$n \rightarrow \nu \eta$	$> 158$	90%	310
$N \rightarrow e^+ \rho$	$> 217$ ( $n$ ), $> 720$ ( $p$ )	90%	149
$N \rightarrow \mu^+ \rho$	$> 228$ ( $n$ ), $> 570$ ( $p$ )	90%	113

HTTP://PDG.LBL.GOV

Page 1

Created: 6/1/2020 10:25

2° Semestre 2020

R. Liner

La desintegración del protón nos entregaría información **super** relevante sobre **Teorías de Gran Unificación** (GUT) y de **Física mas allá del Modelo Estándar** (BSM)

<b>Antilepton + meson</b>			
$N \rightarrow \nu \rho$	$> 19$ ( $n$ ), $> 162$ ( $p$ )	90%	149
$p \rightarrow e^+ \omega$	$> 1600$	90%	143
$p \rightarrow \mu^+ \omega$	$> 2000$	90%	105
$n \rightarrow \nu \omega$	$> 108$	90%	144
$N \rightarrow e^+ K$	$> 17$ ( $n$ ), $> 1000$ ( $p$ )	90%	339
$N \rightarrow \mu^+ K$	$> 26$ ( $n$ ), $> 1600$ ( $p$ )	90%	329
$N \rightarrow \nu K$	$> 86$ ( $n$ ), $> 5900$ ( $p$ )	90%	339
$n \rightarrow \nu K_S^0$	$> 260$	90%	338
$p \rightarrow e^+ K^*(892)^0$	$> 84$	90%	45
$N \rightarrow \nu K^*(892)^0$	$> 78$ ( $n$ ), $> 51$ ( $p$ )	90%	45
<b>Antilepton + meson</b>			
$p \rightarrow e^+ \pi^+ \pi^-$	$> 82$	90%	448
$p \rightarrow e^+ \pi^0 \pi^0$	$> 147$	90%	449
$n \rightarrow e^+ \pi^+ \pi^0$	$> 52$	90%	449
$p \rightarrow \mu^+ \pi^+ \pi^-$	$> 133$	90%	425
$p \rightarrow \mu^+ \pi^0 \pi^0$	$> 101$	90%	427
$n \rightarrow \mu^+ \pi^+ \pi^0$	$> 74$	90%	427
$n \rightarrow e^+ K^0 \pi^-$	$> 18$	90%	319
<b>Lepton + meson</b>			
$n \rightarrow e^- \pi^+$	$> 65$	90%	459
$n \rightarrow \mu^- \pi^+$	$> 49$	90%	453
$n \rightarrow e^- \rho^+$	$> 62$	90%	150
$n \rightarrow \mu^- \rho^+$	$> 7$	90%	115
$n \rightarrow e^- K^+$	$> 32$	90%	340
$n \rightarrow \mu^- K^+$	$> 57$	90%	330
<b>Lepton + mesons</b>			
$p \rightarrow e^- \pi^+ \pi^+$	$> 30$	90%	448
$n \rightarrow e^- \pi^+ \pi^0$	$> 29$	90%	449
$p \rightarrow \mu^- \pi^+ \pi^+$	$> 17$	90%	425
$n \rightarrow \mu^- \pi^+ \pi^0$	$> 34$	90%	427
$p \rightarrow e^- \pi^+ K^+$	$> 75$	90%	320
$p \rightarrow \mu^- \pi^+ K^+$	$> 245$	90%	279
<b>Antilepton + photon(s)</b>			
$p \rightarrow e^+ \gamma$	$> 670$	90%	469
$p \rightarrow \mu^+ \gamma$	$> 478$	90%	463
$n \rightarrow \nu \gamma$	$> 550$	90%	470
$p \rightarrow e^+ \pi^+ \gamma$	$> 100$	90%	469
$n \rightarrow \nu \gamma \gamma$	$> 219$	90%	470
<b>Antilepton + single massless</b>			
$p \rightarrow e^+ X$	$> 790$	90%	—
$p \rightarrow \mu^+ X$	$> 410$	90%	—
<b>Three (or more) leptons</b>			
$p \rightarrow e^+ e^+ e^-$	$> 793$	90%	469
$p \rightarrow e^+ \mu^+ \mu^-$	$> 359$	90%	457
$p \rightarrow e^+ \nu \nu$	$> 170$	90%	469
$n \rightarrow e^+ e^- \nu$	$> 257$	90%	470
$n \rightarrow \mu^+ e^- \nu$	$> 83$	90%	464
$n \rightarrow \mu^+ \mu^- \nu$	$> 79$	90%	458
$p \rightarrow \mu^+ e^+ e^-$	$> 529$	90%	463
$p \rightarrow \mu^+ \mu^+ e^-$	$> 675$	90%	439
$p \rightarrow \mu^+ \nu \nu$	$> 220$	90%	463
$p \rightarrow e^- \mu^+ \mu^+$	$> 6$	90%	457
$n \rightarrow 3\nu$	$> 5 \times 10^{-4}$	90%	470
<b>Inclusive modes</b>			
$N \rightarrow e^+$ anything	$> 0.6$ ( $n$ , $p$ )	90%	—
$N \rightarrow \mu^+$ anything	$> 12$ ( $n$ , $p$ )	90%	—
$N \rightarrow e^+ \pi^0$ anything	$> 0.6$ ( $n$ , $p$ )	90%	—
<b><math>\Delta B = 2</math> dinucleon modes</b>			
The following are lifetime limits per iron nucleus.			
$pp \rightarrow \pi^+ \pi^+$	$> 72.2$	90%	—
$pn \rightarrow \pi^+ \pi^0$	$> 170$	90%	—
$nn \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$> 0.7$	90%	—
$nn \rightarrow \pi^0 \pi^0$	$> 404$	90%	—
$pp \rightarrow K^+ K^+$	$> 170$	90%	—
$pp \rightarrow e^+ e^+$	$> 5.8$	90%	—
$pp \rightarrow e^+ \mu^+$	$> 3.6$	90%	—
$pp \rightarrow \mu^+ \mu^+$	$> 1.7$	90%	—
$pn \rightarrow e^+ \pi^+$	$> 260$	90%	—
$pn \rightarrow \mu^+ \pi^+$	$> 200$	90%	—
$pn \rightarrow \tau^+ \pi^+$	$> 29$	90%	—
$nn \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e$	$> 1.4$	90%	—
$nn \rightarrow \nu_\mu \bar{\nu}_\mu$	$> 1.4$	90%	—
$pn \rightarrow$ invisible	$> 2.1 \times 10^{-5}$	90%	—
$pp \rightarrow$ invisible	$> 5 \times 10^{-5}$	90%	—
<b><math>\bar{p}</math> DECAY MODES</b>			
Partial mean life (years) Confidence level (MeV/c)			
$\bar{p} \rightarrow e^- \gamma$	$> 7 \times 10^5$	90%	469
$\bar{p} \rightarrow \mu^- \gamma$	$> 5 \times 10^4$	90%	463
$\bar{p} \rightarrow e^- \pi^0$	$> 4 \times 10^5$	90%	459
$\bar{p} \rightarrow \mu^- \pi^0$	$> 5 \times 10^4$	90%	453
$\bar{p} \rightarrow e^- \eta$	$> 2 \times 10^4$	90%	309

53

# Tasa de decaimiento (IV)

Si tenemos un sistema de partículas que se desintegran de forma Poisson.

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N \quad \longrightarrow \quad N(t) = N(0)e^{-\Gamma t}$$

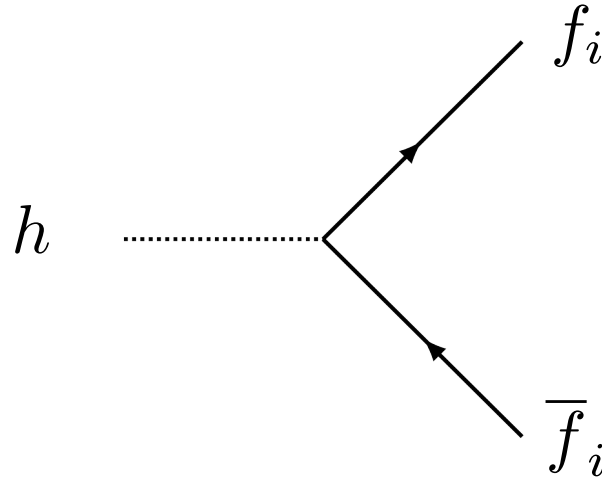
Aquí vemos que la **tasa de decaimiento** se relaciona con el **tiempo de vida media**

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}$$

# Tasa de decaimiento (V)

Las partículas se desintegran en distintas formas, así que la tasa de desintegración es una cantidad aditiva:

$$\Gamma_{\text{total}} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i$$



$$\text{BR}_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_{\text{total}}}$$

*Branching ratio:* Probabilidad de desintegración en el modo  $i$

# Tasa de decaimiento (VI)

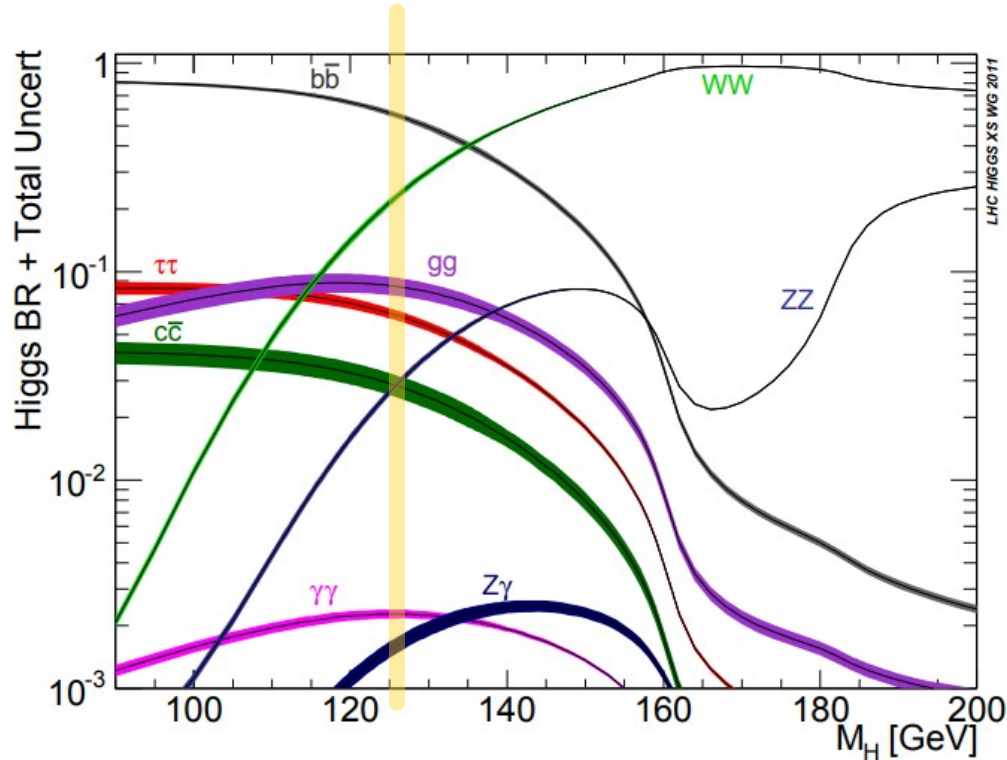


FIG. 1: Higgs branching ratios and their uncertainties for the low mass range.

$$m_h = 125.10 \pm 0.14 \text{ GeV}$$

Caracteriza los *branching ratio* son esenciales para desarrollar técnicas de búsqueda

LHC Higgs Cross Section Working Group

## Standard Model Higgs-Boson Branching Ratios with Uncertainties

A. Denner<sup>1</sup>, S. Heinemeyer<sup>2</sup>, I. Puljak<sup>3</sup>, D. Rebuszi<sup>4</sup>, and M. Spira<sup>5</sup>

<sup>1</sup> Institut für Theoretische Physik und Astrophysik,  
Universität Würzburg, Emil-Hüb-Weg 22, D-97074 Würzburg, Germany

<sup>2</sup> Instituto de Física de Cantabria (IFCA), CSIC-Universidad de Cantabria, Santander, Spain

<sup>3</sup> University of Split, FESB, R. Boskovic bb, 21 000 Split, Croatia

<sup>4</sup> Università di Pavia and INFN Sezione di Pavia, Via A. Bassi, 6 27100 Pavia, Italy and

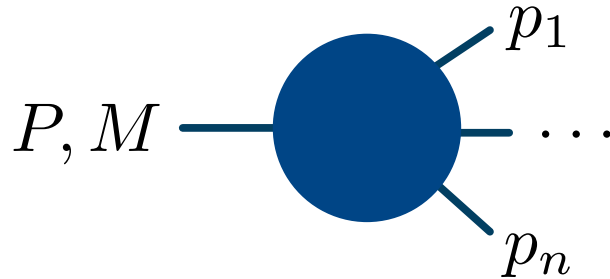
<sup>5</sup> Paul Scherrer Institut, CH-5232 Villigen PSI, Switzerland  
(Dated: September 12, 2011)

We present an update of the branching ratios for Higgs-boson decays in the Standard Model. We list results for all relevant branching ratios together with corresponding uncertainties resulting from input parameters and missing higher-order corrections. As sources of parametric uncertainties we include the masses of the charm, bottom, and top quarks as well as the QCD coupling constant. We compare our results with other predictions in the literature.

(El bosón de Higgs fue descubierto en 2013)

# Desintegración y amplitud (I)

Si consideramos la desintegración de una partícula que se encuentra en reposo



la tasa de desintegración por volumen del espacio de fase:

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2M} |\mathcal{M}|^2 d\Phi_n (P; p_1, \dots, p_n)$$

Regla de oro para decaimiento

# Desintegración y amplitud (II)

La regla de oro se puede entender como la composición de 3 objetos:

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2M} |\mathcal{M}|^2 d\Phi_n(P; p_1, \dots, p_n)$$

Diagram illustrating the components of the Golden Rule formula:

- $\frac{(2\pi)^4}{2M}$ : Normalización de la partícula inicial
- $|\mathcal{M}|^2$ : Módulo cuadrado de la amplitud (invariante de Lorentz)
- $d\Phi_n(P; p_1, \dots, p_n)$ : Espacio de fase de las  $n$ -partículas

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-iP \cdot x} \longrightarrow \rho = 2E |N|^2 = \frac{2E}{V} \longrightarrow \int d^3x \rho = 2E$$

# Desintegración y amplitud (III)

El espacio de fase de las  $n$ -partículas corresponde a:

$$d\Phi_n(P; p_1, \dots, p_n) = \delta^4 \left( P - \sum_i^n p_i \right) \prod_i^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$$

Conservación del 4-momento

Espacio de fase de cada  
partícula normalizado

# Desintegración y amplitud (IV)

Para encontrar la tasa de desintegración basta con integrar:

$$\Gamma = \int \frac{(2\pi)^4}{2M} |\mathcal{M}|^2 d\Phi_n (P; p_1, \dots, p_n)$$

Dependiendo del número de partículas finales, la integración puede ser complicada de realizar, pero hay técnicas desarrolladas para esto.



# Decaimiento a 2 cuerpos (I)

El caso más simple de desintegración es a 2 cuerpos.

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2M} |\mathcal{M}|^2 \delta^4(P - p_1 - p_2) \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2}$$

La conservación del momentum nos permite reducir a:

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2 M} |\mathcal{M}|^2 \delta(M - E_1 - E_2^*) \frac{p_1^2 dp_1 d\Omega_1}{E_1 E_2^*}$$

con

$$E_2^* = \sqrt{p_1^2 + m_2^2}$$

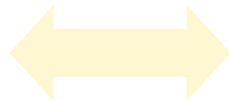
# Decaimiento a 2 cuerpos (II)

La delta en energía nos da que:

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \quad |p_1| = \frac{\sqrt{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)}}{2M}$$

Así la tasa por ángulo sólido y la tasa de decaimiento integrado son:

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} |\mathcal{M}|^2 \frac{|p_1|}{M^2} d\Omega_1$$



$$\Gamma = \frac{1}{8\pi^2} |\mathcal{M}|^2 \frac{|p_1|}{M^2}$$

# Ejercicios

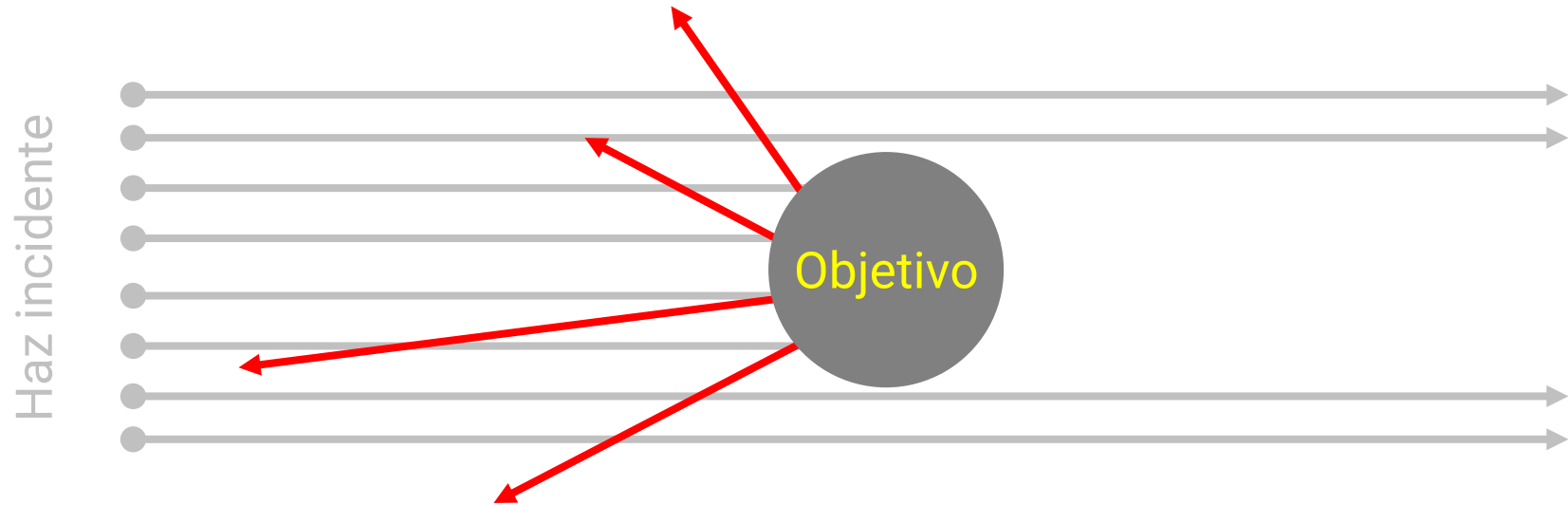
Estudiar la cinemática del decaimiento a 2 y 3 cuerpos.

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2M} |\mathcal{M}|^2 \delta^4(P - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2}$$

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2M} |\mathcal{M}|^2 \delta^4(P - p_1 - p_2 - p_3) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3}$$

# Sección eficaz de interacción (I)

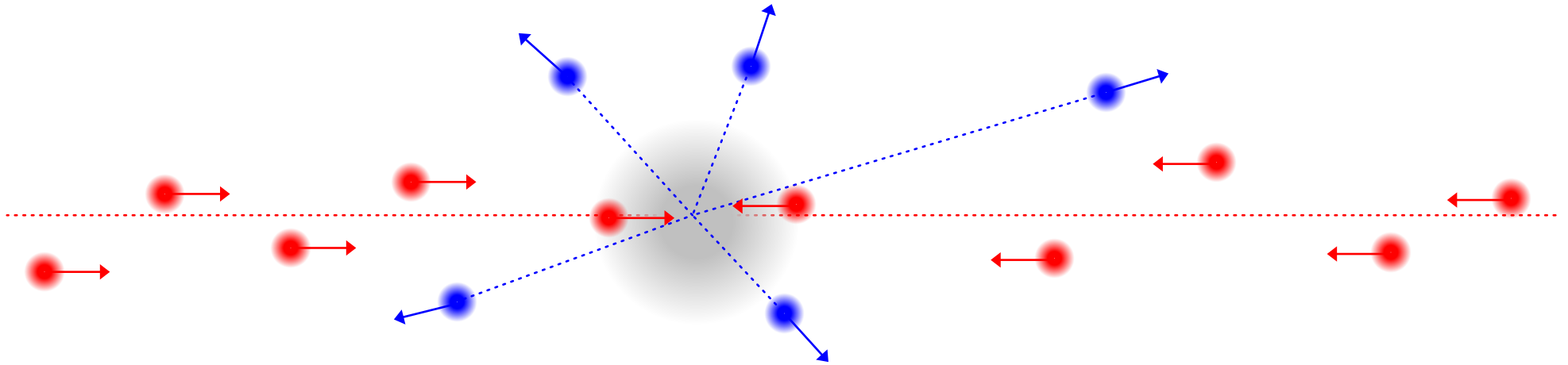
La sección eficaz (o sección de choque) es una medida de la probabilidad de interacción que tiene una partícula al interactuar con otra.



En el caso de un colisionador como en el *LHC*, se hacen “chocar” haces de partículas. Por ejemplo: protones, electrones, positrones.

# Sección eficaz de interacción (II)

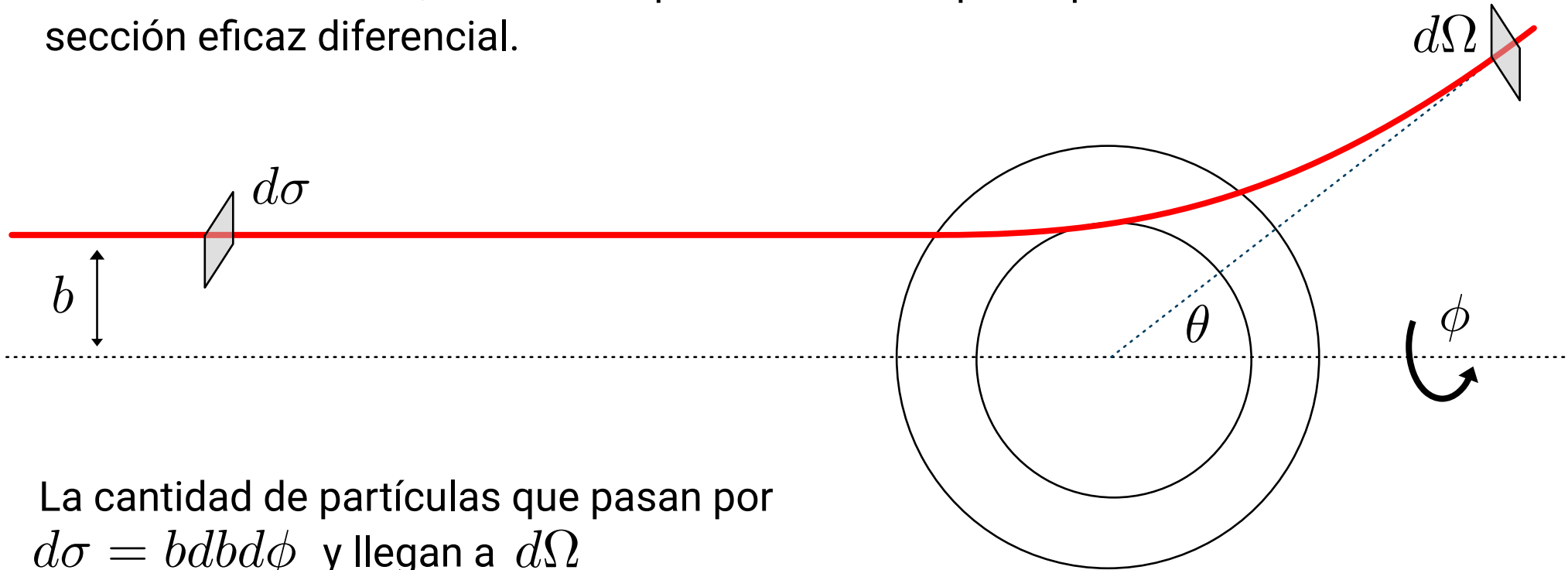
El haz de partículas tiene asociado incertidumbres debido al momentum y a la densidad de partículas contenidas



$$\sigma = \frac{1}{T} \frac{1}{\Phi} N = \frac{\text{Número de partículas desviadas}}{\text{Tiempo x Densidad x Velocidad}} = [\text{pbarn}] = 10^{-36}[\text{cm}^2]$$

# Sección eficaz de interacción (III)

En mecánica clásica, se utiliza el parámetro de impacto para estimar la sección eficaz diferencial.



La cantidad de partículas que pasan por  $d\sigma = b db d\phi$  y llegan a  $d\Omega$

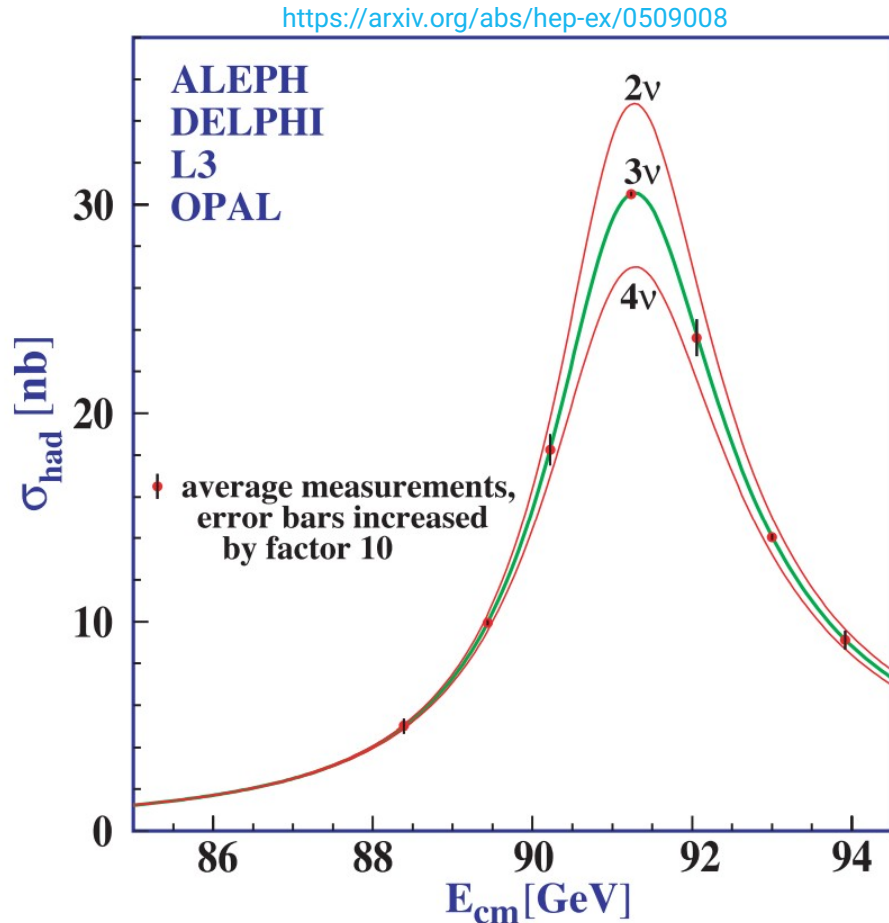
# Sección eficaz de interacción (IV)

La sección eficaz diferencial  
corresponde a:

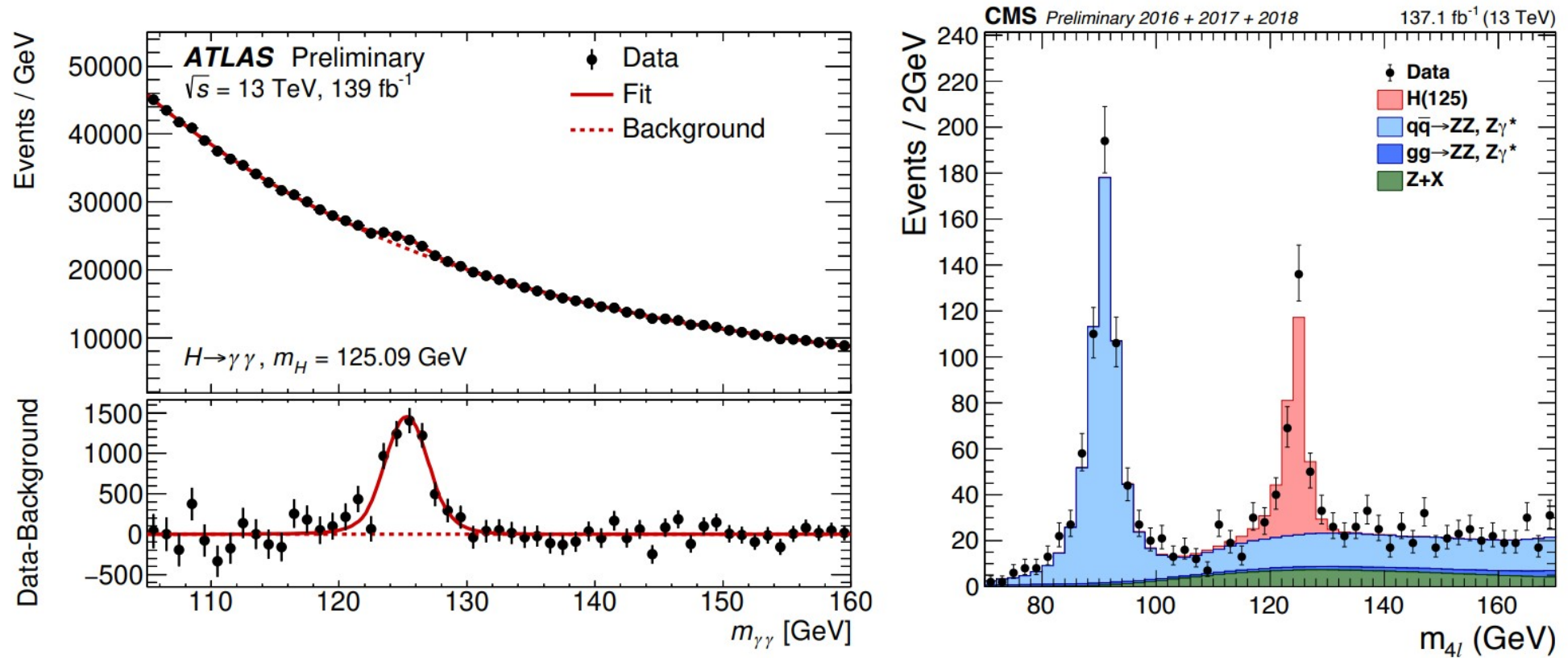
$$D(\theta, \phi) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\mathcal{L}} \frac{d\mathcal{N}}{d\Omega}$$

Luminosidad  
del experimento

Número de partículas por  
unidad de ángulo sólido



# Sección eficaz de interacción (V)

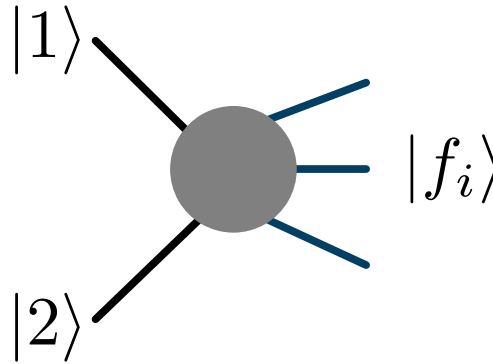


<https://pdg.lbl.gov/2020/reviews/rpp2020-rev-higgs-boson.pdf>



# Sección eficaz y amplitud de scattering (I)

Al interaccionar las partículas incidentes pueden ir a parar a distintos estados:

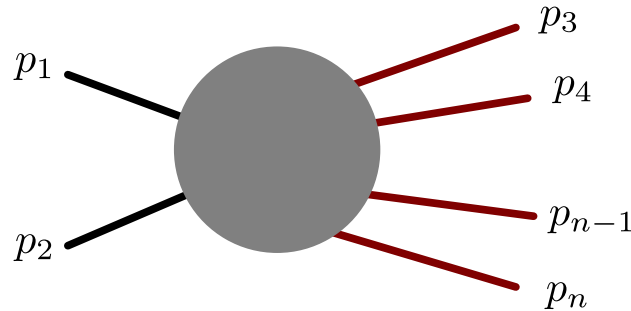


La sección eficaz total es la suma de las secciones eficaces a cada estado final

$$\sigma_{\text{total}} = \sum_i \sigma_i$$

# Sección eficaz y amplitud de scattering (II)

En el caso del scattering de 2 partículas a  $n-2$  partículas



$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} d\Phi_n(p_1 + p_2; p_3 \dots p_n)$$

Regla de oro para scattering

# Sección eficaz y amplitud de scattering (III)

Si nos encontramos en el marco de referencia del laboratorio:

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = m_2 |p_{1\text{lab}}|$$

y en el marco de referencia del centro de momentum:

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = |p_{1\text{cm}}| \sqrt{s}$$

# Sección eficaz a 2 cuerpos (I)

El caso mas sencillo de analizar es el caso de la sección eficaz a 2 cuerpos:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4}$$

En este caso:  $p_1 = (E_1, \vec{p}_1)$   $p_2 = (E_2, -\vec{p}_1)$  (centro de momentum)

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = |p_1|(E_1 + E_2) = |p_1|\sqrt{s}$$

## Sección eficaz a 2 cuerpos (II)

Así la expresión se reduce a:

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 |p_1| \sqrt{s}} \delta(\sqrt{s} - E_3 - E_4) \delta^3(p_3 + p_4) \frac{d^3 p_3}{E_3} \frac{d^3 p_4}{E_4}$$

Al aplicar la delta<sup>3</sup> sobre  $p_4$  y reordenar los términos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 |p_1| \sqrt{s}} \delta(\sqrt{s} - E_3 - E_4^*) \frac{p_3^2 dp_3}{E_3 E_4^*}$$

$$\text{donde: } E_4^* = \sqrt{p^2 + m_4^2} \quad \text{y} \quad \vec{p} = \vec{p}_3 = -\vec{p}_4$$

## Sección eficaz a 2 cuerpos (III)

La delta en energía la podemos transformar a delta del módulo de  $p_3$ :

$$\delta(\sqrt{s} - \sqrt{p^2 + m_3^2} - \sqrt{p^2 + m_4^2}) = \delta(p - p^*) \frac{E_3^* E_4^*}{p^* (E_3^* + E_4^*)}$$

donde 
$$p^* = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{(s - m_4^2)^2 - 4sm_3^2}$$

y así obtenemos que la sección eficaz por ángulo sólido es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 s} \frac{p^*}{|p_1|}$$

# Sección eficaz a 2 cuerpos (IV)

Hay que remarcar que la amplitud de scattering es invariante de Lorentz.  
Para el caso del scattering a 2 cuerpos:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(s, t, u)$$



Variables de Mandelstam

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

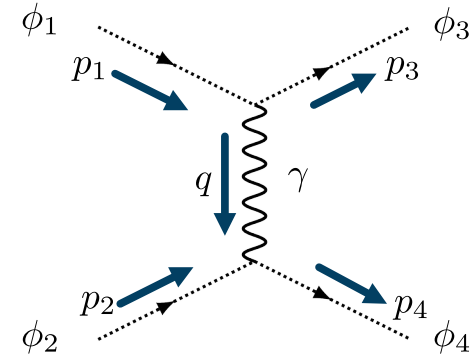
$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2$$

# Scattering de campos escalares cargados (I)

Anteriormente ya calculamos la amplitud de scattering

$$-i\mathcal{M} = [-iq(p_1 + p_3)_\mu] \left[-i \frac{g^{\mu\nu}}{q^2}\right] [-iq(p_2 + p_4)_\nu]$$



$$-i\mathcal{M} = iq^2 \frac{(p_1 + p_3)_\mu (p_2 + p_4)^\mu}{(p_1 - p_3)^2}$$

en función de los momentum

$$-i\mathcal{M} = iq^2 \frac{s - u}{t}$$

en función de las variables s,t,u



# Scattering de campos escalares cargados (II)

En el CM:

$$p_1 = (E_1, 0, 0, p) \qquad p_3 = (E_3, p \sin \theta, 0, p \cos \theta)$$

$$p_2 = (E_2, 0, 0, -p) \qquad p_4 = (E_4, -p \sin \theta, 0, -p \cos \theta)$$

$$s = 4(p^2 + m^2) \quad t = -2p^2(1 - \cos \theta) \quad u = -2p^2(\cos \theta + 1)$$

Así la sección eficaz diferencial es:

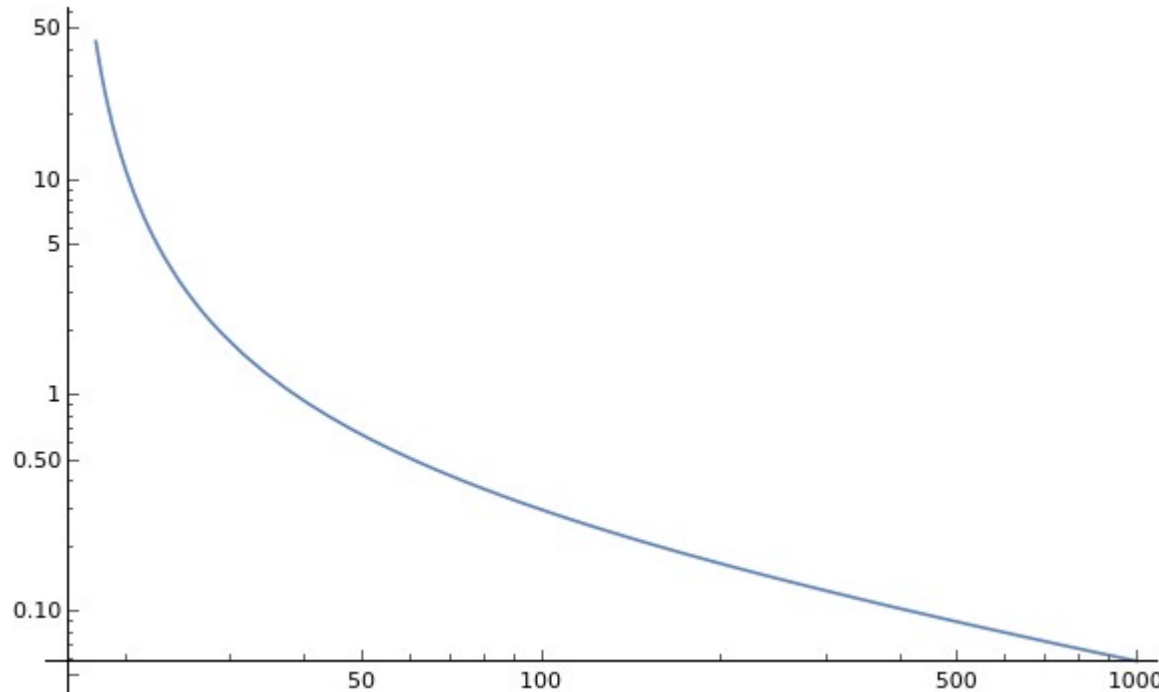
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 s} \frac{p}{p} = \frac{q^4}{64\pi^2 s} \left( \frac{s - u}{t} \right)^2$$

# Scattering de campos escalares cargados (III)

Al reemplazar e integrar en ángulo  $\phi$ , se obtiene:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{q^4}{32\pi} \frac{(3s - 4m^2 + (s - 4m^2) \cos \theta)^2}{s (s - 4m^2)^2 (1 - \cos \theta)^2}$$

$$\frac{m^2}{q^4} \frac{d\sigma}{d\theta}$$

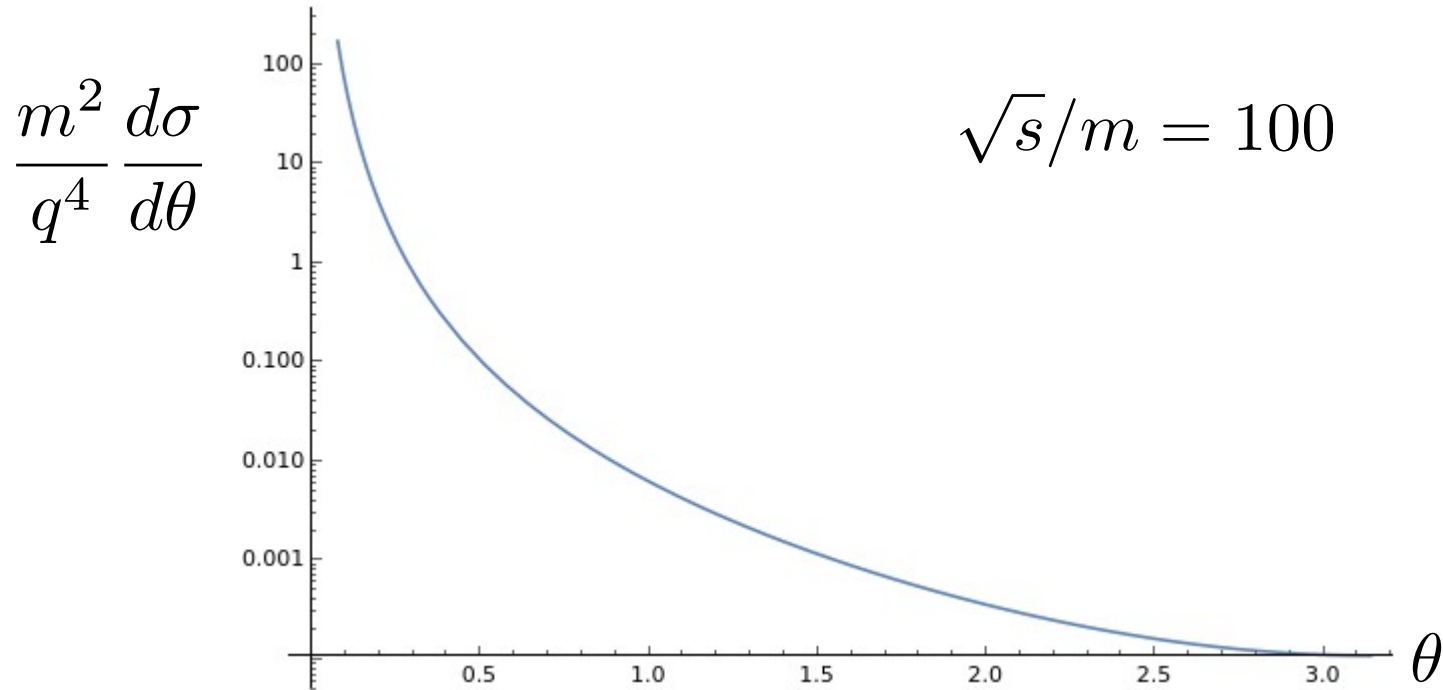


$$\theta = \pi/4$$

$$\sqrt{s}/m$$

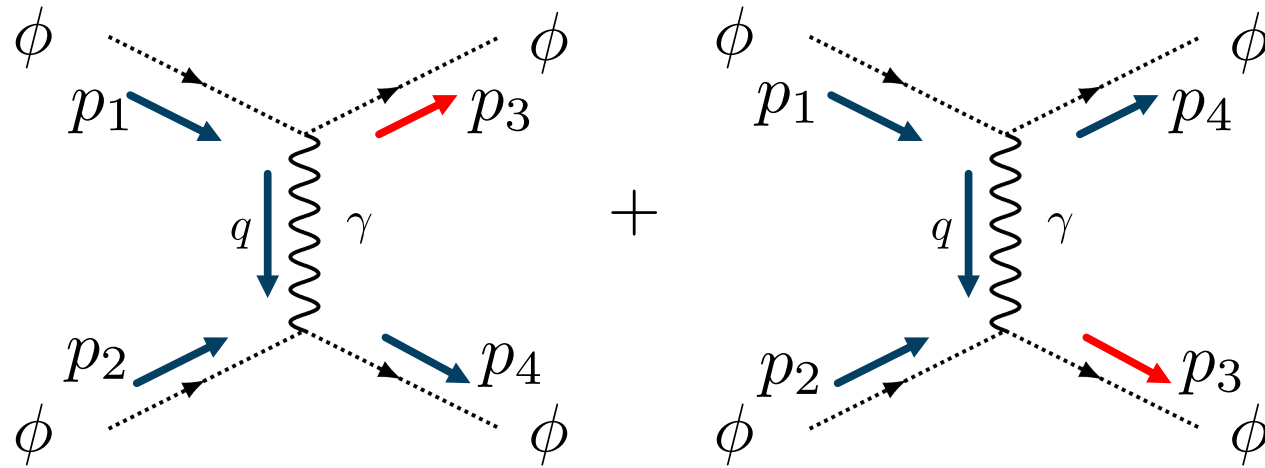
# Scattering de campos escalares cargados (IV)

Notar que la sección eficaz diverge para ángulos pequeños!!!!



Falta un diagrama por calcular!

# Scattering de campos escalares cargados (V)

$$-i\mathcal{M} =$$


The image shows two Feynman diagrams for the scattering of charged scalar fields ( $\phi$ ) via a photon exchange ( $\gamma$ ). The diagrams are separated by a plus sign. In both diagrams, a vertical wavy line represents the photon exchange, with a downward arrow labeled  $q$  and the label  $\gamma$ . The external lines are dotted and labeled  $\phi$  at both ends. Blue arrows indicate the flow of scalar particles, and red arrows indicate the flow of the photon.

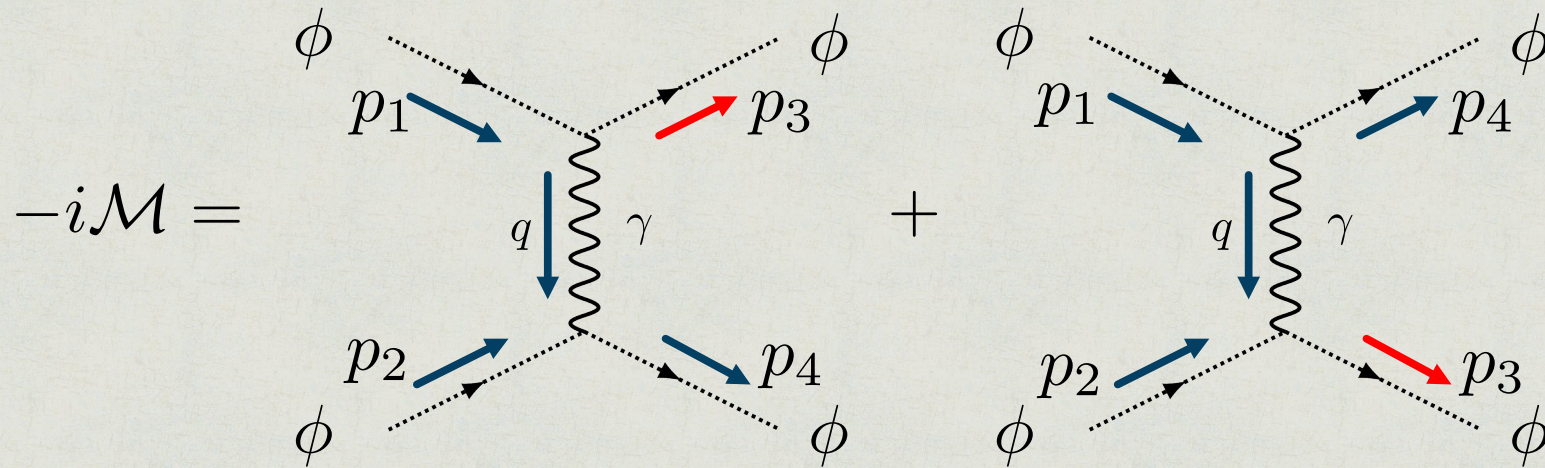
Left diagram: Incoming scalar particles with momenta  $p_1$  and  $p_2$  (blue arrows) interact via a photon exchange. The outgoing scalar particles have momenta  $p_3$  (red arrow) and  $p_4$  (blue arrow).

Right diagram: Incoming scalar particles with momenta  $p_1$  and  $p_2$  (blue arrows) interact via a photon exchange. The outgoing scalar particles have momenta  $p_4$  (blue arrow) and  $p_3$  (red arrow).

Se nos olvidó incluir el segundo diagrama que nos lleva al mismo estado final

# Ejercicios

Escribir la amplitud total del scattering:  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$



y la sección eficaz.

# Reglas de Feynman para QED (I)

Recordando el lagrangiano de QED:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}D^{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

donde:  $D^{\mu} = \partial^{\mu} - iqA^{\mu}$

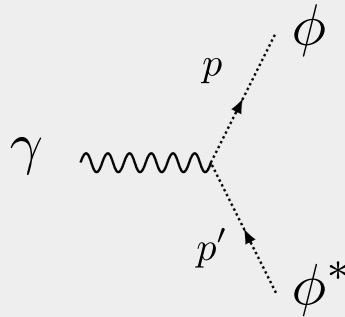
y procediendo de forma similar al lagrangiano de SQED, se obtiene el lagrangiano de interacción:

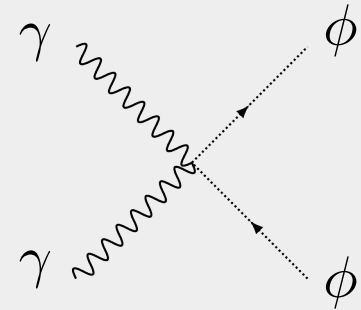
$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \mathcal{L}_{\psi} + \mathcal{L}_{\text{EM}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}_{\text{int}} = q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}$$

# Reglas de Feynman para QED (II)

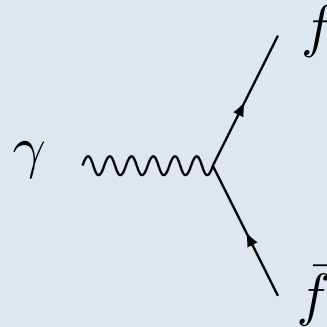
Los vértices de interacción con el fotón se obtienen a través de  $i\mathcal{L}_{\text{int}}$

**SQED**


$$: -iq(p + p')^\mu$$


$$: i2q^2 g^{\mu\nu}$$

**QED**


$$: iq\gamma^\mu$$

# Reglas de Feynman para QED (III)

Los fermiones, a través de sus ecuaciones de movimiento, tienen las siguientes propiedades para sus estados de espín:  $s = 1, 2$

## Electrones

## Positrones

Función de onda

$$\psi = N e^{-ip \cdot x} u^{(s)}(p)$$

$$\psi = N e^{ip \cdot x} v^{(s)}(p)$$

Ecuación de Dirac

$$\left\{ \begin{array}{l} (\gamma_\mu p^\mu - m) u^{(s)}(p) = 0 \\ \bar{u}^{(s)}(p) (\gamma_\mu p^\mu - m) = 0 \end{array} \right.$$

$$(\gamma_\mu p^\mu + m) v^{(s)}(p) = 0$$

$$\bar{v}^{(s)}(p) (\gamma_\mu p^\mu + m) = 0$$



# Reglas de Feynman para QED (IV)

## Electrones

## Positrones

Ortonormalización

$$\bar{u}^{(i)}(p)u^{(j)}(p) = 2m\delta_{ij}$$

$$\bar{v}^{(i)}(p)v^{(j)}(p) = -2m\delta_{ij}$$

Compleitud

$$\sum_{s=1}^2 u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p) = (\not{p} + m)$$

$$\sum_{s=1}^2 v^{(s)}(p)\bar{v}^{(s)}(p) = (\not{p} - m)$$

# Reglas de Feynman para QED (V)

Mientras los fotones cumplen para sus estado de polarización:  $\lambda = 1, 2$

Función de onda

$$A_\mu = e^{-ip \cdot x} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(p)$$

Ecuación de movimiento

$$\epsilon^{\mu(\lambda)} p_\mu = 0$$

Ortonormalización

$$\epsilon_\mu^{(i)*}(p) \epsilon^{\mu(j)}(p) = -\delta_{ij}$$

Completitud

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(p) \epsilon_\nu^{(\lambda)}(p) = -g_{\mu\nu}$$

# Reglas de Feynman para QED (VI)

También hay reglas para las patas externas.

Entrante  $\xrightarrow{p}$

Saliente  $\xrightarrow{p}$

Electrón

$$\longrightarrow \text{---} \bigcirc : u(p)$$

$$\bigcirc \text{---} \longrightarrow : \bar{u}(p)$$

Positrón

$$\longleftarrow \text{---} \bigcirc : \bar{v}(p)$$

$$\bigcirc \text{---} \longleftarrow : v(p)$$

Fotón

$$\text{~~~~~} \bigcirc : \epsilon_{\mu}(p)$$

$$\bigcirc \text{~~~~~} : \epsilon_{\mu}^*(p)$$

Escalar

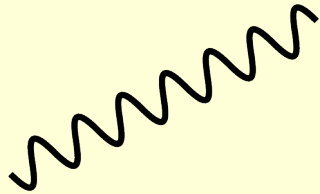
$$\cdots \longrightarrow \bigcirc : 1$$

$$\bigcirc \cdots \longrightarrow : 1$$

# Reglas de Feynman para QED (VII)

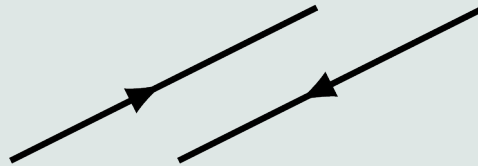
Y por último los propagadores:

fotón



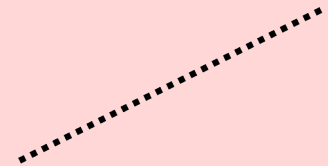
$$-i \frac{g^{\mu\nu}}{p^2}$$

electrón y positrón



$$i \frac{\gamma_\mu p^\mu + m}{p^2 - m^2}$$

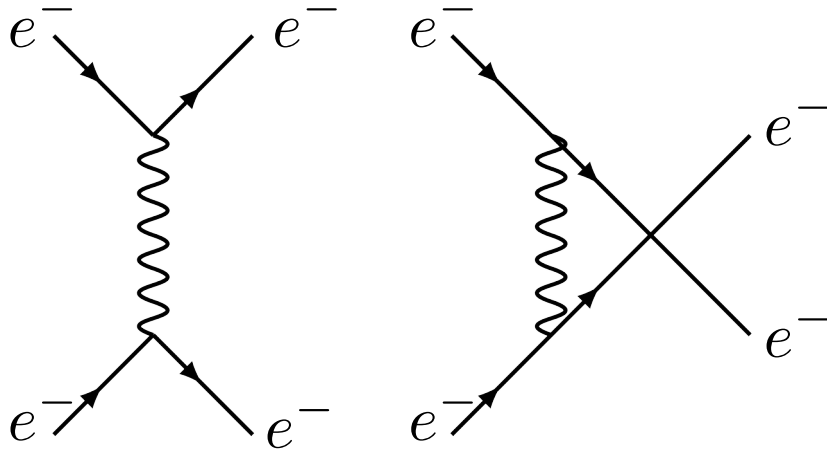
escalar



$$\frac{i}{p^2 - m^2}$$

# Procesos en QED (I)

Usando las reglas de Feynman se pueden construir las amplitudes y entender procesos

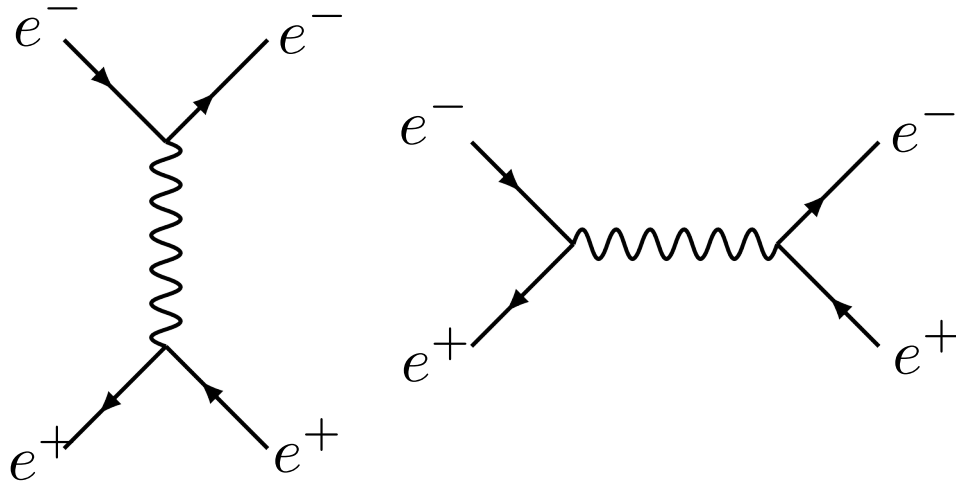


Moller Scattering:

$$e^- e^- \rightarrow e^- e^-$$

$$e^+ e^+ \rightarrow e^+ e^+$$

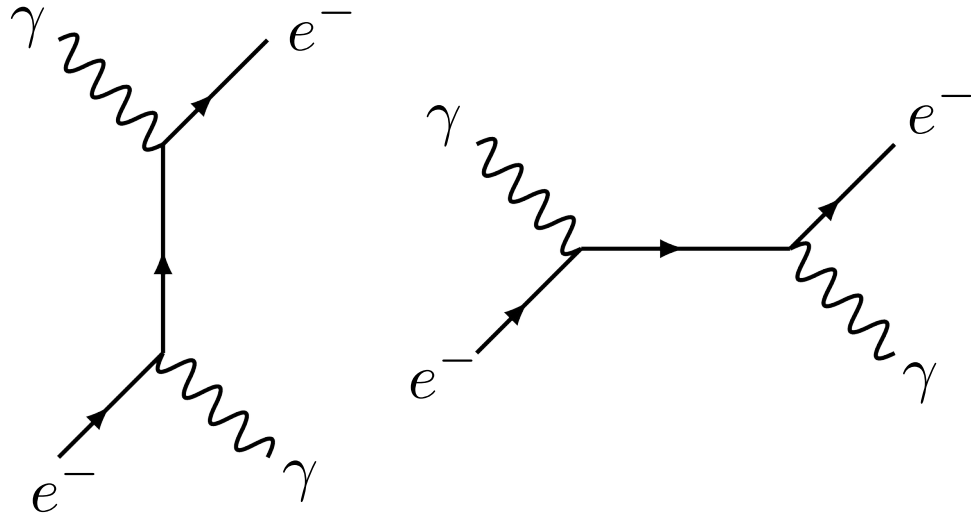
## Procesos en QED (II)



BhaBha Scattering:

$$e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$$

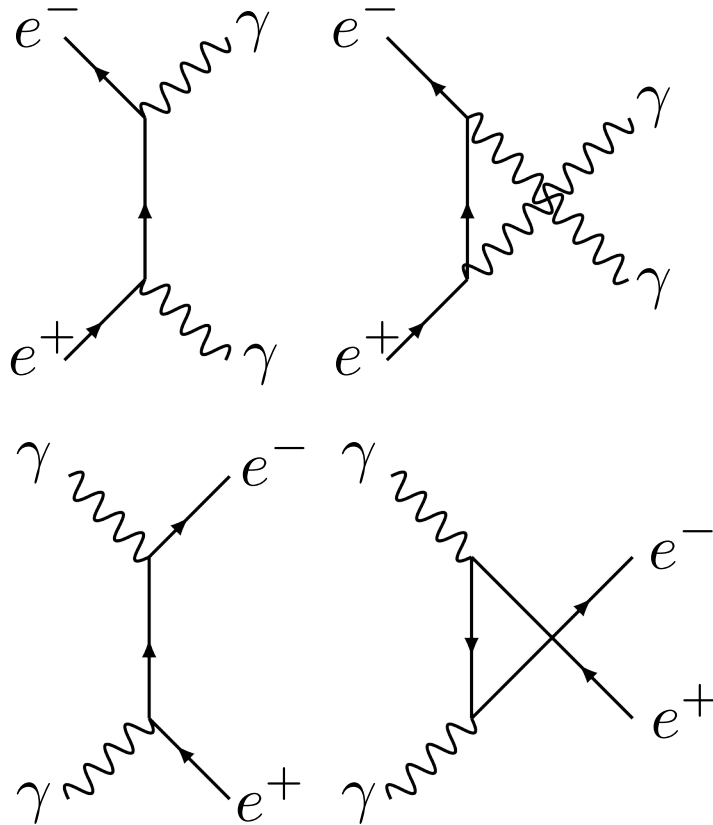
# Procesos en QED (III)



Compton Scattering:

$$e^{\pm}\gamma \rightarrow e^{\pm}\gamma$$

# Procesos en QED (IV)



Creación o aniquilación de pares

$$e^- e^+ \rightarrow \gamma \gamma$$

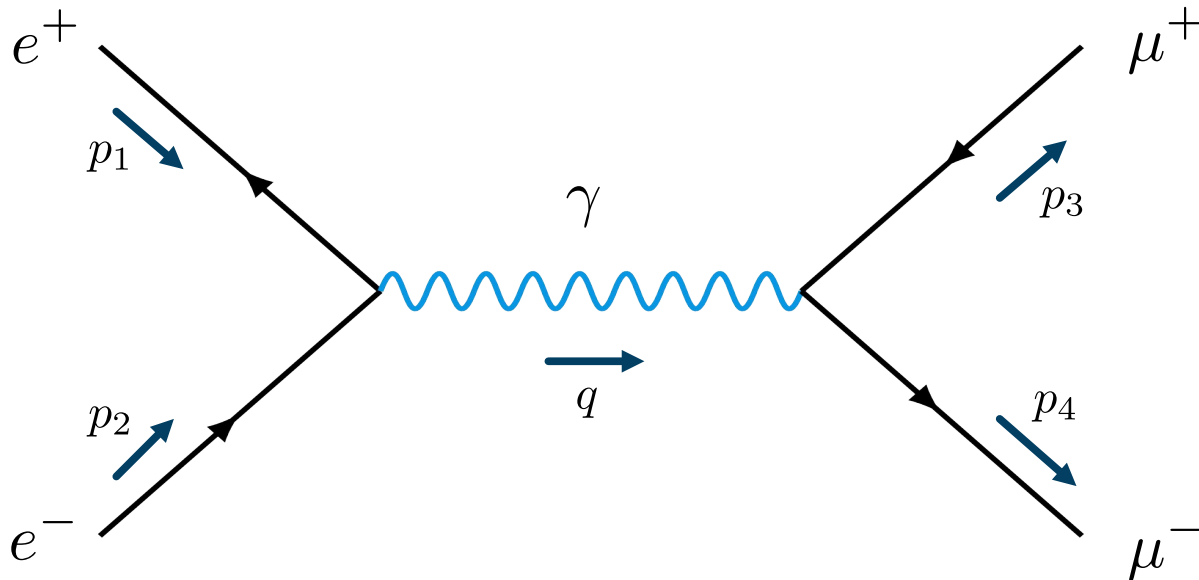
$$\gamma \gamma \rightarrow e^- e^+$$



# Producción de par de muones (I)

Aunque los muones no son parte de QED, los podemos pensar como electrones con masa distinta.

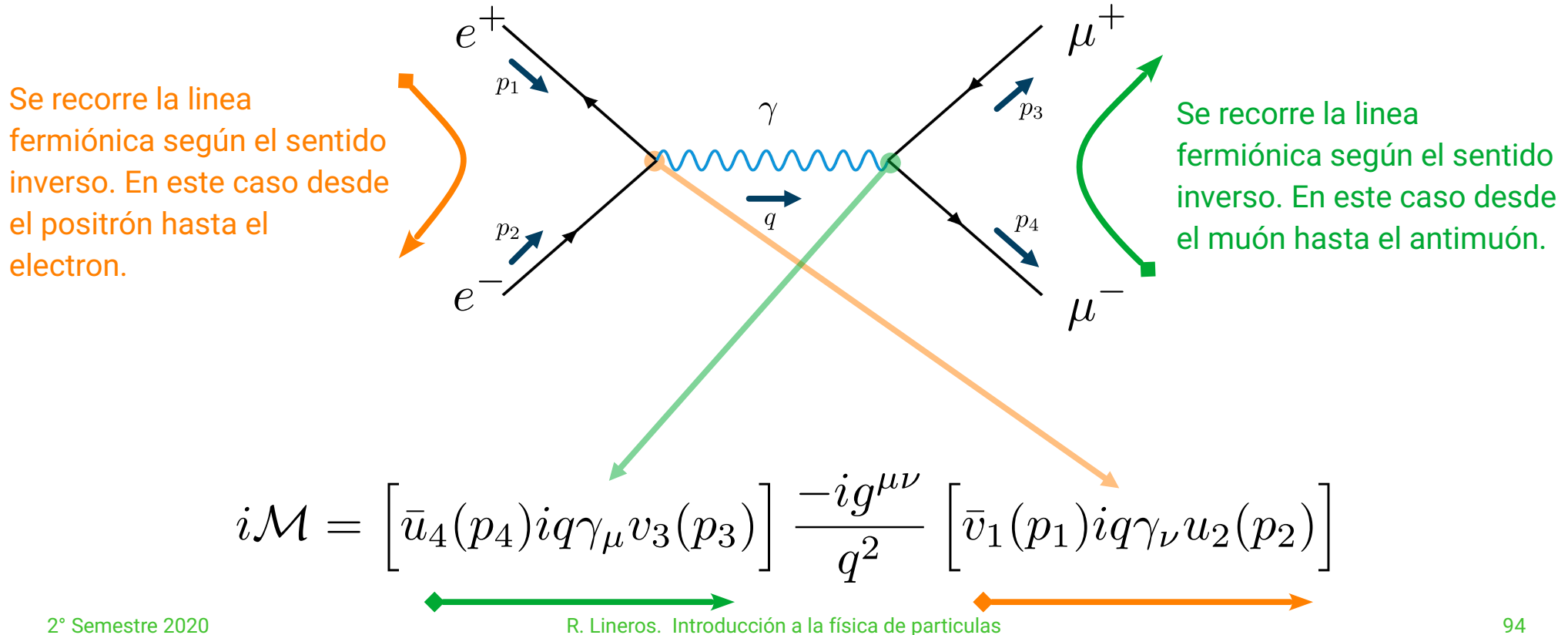
$$e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$$



En QED + muones, sólo existe un diagrama

# Producción de par de muones (II)

Vamos a construir la amplitud de scattering.



# Producción de par de muones (III)

Ya con la amplitud construida, se necesita su complejo conjugado para lograr el módulo cuadrado.

$$\mathcal{M} = \frac{q^2}{(p_1 + p_2)^2} \left[ \bar{u}_4(p_4) \gamma_\mu v_3(p_3) \right] \left[ \bar{v}_1(p_1) \gamma^\mu u_2(p_2) \right]$$



$$\mathcal{M}^\dagger = \frac{q^2}{(p_1 + p_2)^2} \left[ \bar{v}_1(p_1) \gamma^\mu u_2(p_2) \right]^\dagger \left[ \bar{u}_4(p_4) \gamma_\mu v_3(p_3) \right]^\dagger$$

# Producción de par de muones (IV)

La amplitud hermítica conjugada, se puede reescribir ya que:

$$\left[ \bar{v}_1(p_1) \gamma^\mu u_2(p_2) \right]^\dagger = \left[ \bar{u}_2(p_2) \gamma^\mu v_1(p_1) \right]$$

$$\gamma_0 \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 = \gamma_\mu$$

$$\left[ \bar{u}_4(p_4) \gamma_\mu v_3(p_3) \right]^\dagger = \left[ \bar{v}_3(p_3) \gamma_\mu u_4(p_4) \right]$$

Así se obtiene:

$$\mathcal{M}^\dagger = \frac{q^2}{(p_1 + p_2)^2} \left[ \bar{u}_2(p_2) \gamma^\mu v_1(p_1) \right] \left[ \bar{v}_3(p_3) \gamma_\mu u_4(p_4) \right]$$

# Producción de par de muones (V)

Ahora podemos calcular la amplitud módulo cuadrado.

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}^\dagger &= \frac{q^4}{(p_1 + p_2)^4} \times \\ &\times \left[ \bar{u}_4(p_4) \gamma_\mu v_3(p_3) \right] \left[ \bar{v}_1(p_1) \gamma^\mu u_2(p_2) \right] \\ &\times \left[ \bar{u}_2(p_2) \gamma^\nu v_1(p_1) \right] \left[ \bar{v}_3(p_3) \gamma_\nu u_4(p_4) \right] \end{aligned}$$

A pesar de que cada bloque tiene índices espinoriales, están agrupados de tal forma que forman un número complejo.

# Producción de par de muones (VI)

Los podemos reordenar así identificamos 2 bloques:

$$|\mathcal{M}|^2 \propto \left[ \bar{u}_4(p_4) \gamma_\mu v_3(p_3) \right] \left[ \bar{v}_3(p_3) \gamma_\nu u_4(p_4) \right] \\ \times \left[ \bar{u}_2(p_2) \gamma^\nu v_1(p_1) \right] \left[ \bar{v}_1(p_1) \gamma^\mu u_2(p_2) \right]$$

Cada uno de los bloques son equivalente a una traza sobre los índices espinoriales

$$\left[ \bar{u}_4(p_4) \gamma_\mu v_3(p_3) \right] \left[ \bar{v}_3(p_3) \gamma_\nu u_4(p_4) \right] = \text{Tr} \left\{ \bar{u}_4(p_4) \gamma_\mu v_3(p_3) \bar{v}_3(p_3) \gamma_\nu u_4(p_4) \right\} \\ \left[ \bar{u}_2(p_2) \gamma^\nu v_1(p_1) \right] \left[ \bar{v}_1(p_1) \gamma^\mu u_2(p_2) \right] = \text{Tr} \left\{ \bar{u}_2(p_2) \gamma^\nu v_1(p_1) \bar{v}_1(p_1) \gamma^\mu u_2(p_2) \right\}$$

# Producción de par de muones (VII)

La traza tiene una propiedad cíclica:  $\text{Tr}\{ABAC\} = \text{Tr}\{BACA\} = \text{Tr}\{ACAB\}$

$$\text{Tr} \left\{ \bar{u}_4(p_4) \gamma_\mu v_3(p_3) \bar{v}_3(p_3) \gamma_\nu u_4(p_4) \right\} \rightarrow \text{Tr} \left\{ u_4(p_4) \bar{u}_4(p_4) \gamma_\mu v_3(p_3) \bar{v}_3(p_3) \gamma_\nu \right\}$$

$$\text{Tr} \left\{ \bar{u}_2(p_2) \gamma^\nu v_1(p_1) \bar{v}_1(p_1) \gamma^\mu u_2(p_2) \right\} \rightarrow \text{Tr} \left\{ u_2(p_2) \bar{u}_2(p_2) \gamma^\nu v_1(p_1) \bar{v}_1(p_1) \gamma^\mu \right\}$$

Así se obtiene que:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{q^4}{(p_1 + p_2)^4} \text{Tr} \left\{ u_4(p_4) \bar{u}_4(p_4) \gamma_\mu v_3(p_3) \bar{v}_3(p_3) \gamma_\nu \right\} \\ \text{Tr} \left\{ u_2(p_2) \bar{u}_2(p_2) \gamma^\nu v_1(p_1) \bar{v}_1(p_1) \gamma^\mu \right\}$$

# Producción de par de muones (VIII)

En el caso de estudiar el proceso sin polarización, es decir, no se puede preparar el experimento con partículas polarizadas ni medir la polarización de las partículas salientes.

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2$$



# Producción de par de muones (IX)

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4} \frac{q^4}{(p_1 + p_2)^4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} \text{Tr} \left\{ u_4^{s_4}(p_4) \bar{u}_4^{s_4}(p_4) \gamma_\mu v_3^{s_3}(p_3) \bar{v}_3^{s_3}(p_3) \gamma_\nu \right\} \\ \text{Tr} \left\{ u_2^{s_2}(p_2) \bar{u}_2^{s_2}(p_2) \gamma^\nu v_1^{s_1}(p_1) \bar{v}_1^{s_1}(p_1) \gamma^\mu \right\}$$

Ahora son útiles las relaciones de completitud:

$$\sum_{s=1}^2 u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) = (\not{p} + m)$$

$$\sum_{s=1}^2 v^{(s)}(p) \bar{v}^{(s)}(p) = (\not{p} - m)$$

# Producción de par de muones (IX)

Cada vez se reduce la expresión:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4} \frac{q^4}{(p_1 + p_2)^4} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_4 + m') \gamma_\mu (\not{p}_3 - m') \gamma_\nu \right\} \\ \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\nu (\not{p}_1 - m) \gamma^\mu \right\}$$

Recordar que:  $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$

Así que necesitamos calcular las trazas de las matrices gamma

# Más propiedades de las matrices gamma (I)

Las matrices cumple una serie de propiedades, entre ellas sus trazas.

$$\text{Tr} (\mathbb{1}) = 4$$

$$\text{Tr} (\# \text{impar}) = 0$$

$$\text{Tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$$

$$\text{Tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho) = 4 (g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\lambda\nu})$$

$$\text{Tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^5) = 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$$

# Más propiedades de las matrices gamma (II)

Otras propiedades son sobre la contracción de éstas:

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4 \mathbb{1}$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -2 \gamma^\nu$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu = 4 g^{\nu\lambda}$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \gamma^\mu = -2 \gamma^\rho \gamma^\lambda \gamma^\nu$$

# Reducción de la trazas (I)

Con las propiedades de las trazas se puede reducir las trazas en la amplitud:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4} \frac{q^4}{(p_1 + p_2)^4} \text{Tr} \left\{ (\not{p}_4 + m') \gamma_\mu (\not{p}_3 - m') \gamma_\nu \right\} \\ \text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\nu (\not{p}_1 - m) \gamma^\mu \right\}$$

$$\text{Tr} \left\{ (\not{p}_4 + m') \gamma_\mu (\not{p}_3 - m') \gamma_\nu \right\} = p_4^\lambda p_3^\rho \text{Tr} \left\{ \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \right\} - m'^2 \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \gamma_\nu \right\} \\ = 4 \left( p_{4\mu} p_{3\nu} - p_4^\rho p_{3\rho} g_{\mu\nu} + p_{4\nu} p_{3\mu} - m'^2 g_{\mu\nu} \right)$$

## Reducción de la trazas (II)

La segunda traza es más sencilla de hacer:

$$\begin{aligned}\text{Tr} \left\{ (\not{p}_2 + m) \gamma^\nu (\not{p}_1 - m) \gamma^\mu \right\} &= p_2^\lambda p_1^\rho \text{Tr} \left\{ \gamma_\lambda \gamma^\nu \gamma_\rho \gamma^\mu \right\} - m^2 \text{Tr} \left\{ \gamma^\nu \gamma^\mu \right\} \\ &= 4 \left( p_2^\nu p_1^\mu - p_2^\rho p_{1\rho} g^{\nu\mu} + p_2^\mu p_1^\nu - m^2 g^{\nu\mu} \right)\end{aligned}$$

Sólo falta la contracción de Lorentz entre las trazas los términos.

## Reducción de la trazas (III)

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\dots) \text{Tr}(\dots) &= 16 \left( p_2^\nu p_1^\mu - p_2^\rho p_{1\rho} g^{\nu\mu} + p_2^\mu p_1^\nu - m^2 g^{\nu\mu} \right) \\ &\quad \left( p_{4\mu} p_{3\nu} - p_4^\rho p_{3\rho} g_{\mu\nu} + p_{4\nu} p_{3\mu} - m'^2 g_{\mu\nu} \right) \\ &= 32 \left( p_1^\mu p_{3\mu} p_2^\nu p_{4\nu} + p_1^\mu p_{4\mu} p_2^\nu p_{3\nu} \right. \\ &\quad \left. + p_1^\mu p_{2\mu} m'^2 + p_3^\mu p_{4\mu} m^2 + 2m'^2 m^2 \right)\end{aligned}$$

Así obtenemos finalmente la amplitud módulo cuadrado:

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{8q^4}{(p_1 + p_2)^4} \left( p_1^\mu p_{3\mu} p_2^\nu p_{4\nu} + p_1^\mu p_{4\mu} p_2^\nu p_{3\nu} \right. \\ &\quad \left. + p_1^\mu p_{2\mu} m'^2 + p_3^\mu p_{4\mu} m^2 + 2m'^2 m^2 \right)\end{aligned}$$

# Ejercicios

Escribir la amplitud módulo cuadrado en términos de las variables de Mandelstam y también en el marco CM.

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8q^4}{(p_1 + p_2)^4} (p_1^\mu p_{3\mu} p_2^\nu p_{4\nu} + p_1^\mu p_{4\mu} p_2^\nu p_{3\nu} \\ + p_1^\mu p_{2\mu} m'^2 + p_3^\mu p_{4\mu} m^2 + 2m'^2 m^2)$$



# Sección eficaz de producción de muones (I)

Al considerar que el scattering ocurre en el centro de momenta:

$$\begin{array}{lll} p_1 = (E_1, \vec{p}_i) & p_3 = (E_3, \vec{p}_o) & \vec{p}_i \cdot \vec{p}_o = p_i p_o \cos \theta \\ p_2 = (E_2, -\vec{p}_i) & p_4 = (E_4, -\vec{p}_o) & \end{array}$$

y las variables de Mandelstam:

$$\begin{array}{lll} s = 2m^2 + 2p_{1\mu}p_2^\mu & t = m^2 + m'^2 - 2p_{1\mu}p_3^\mu & u = m^2 + m'^2 - 2p_{1\mu}p_4^\mu \\ s = 2m'^2 + 2p_{3\mu}p_4^\mu & t = m^2 + m'^2 - 2p_{2\mu}p_4^\mu & u = m^2 + m'^2 - 2p_{2\mu}p_3^\mu \end{array}$$

# Sección eficaz de producción de muones (II)

En la amplitud identificamos s,t,u:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 \propto \underbrace{(p_1^\mu p_{3\mu} p_2^\nu p_{4\nu})}_t + \underbrace{(p_1^\mu p_{4\mu} p_2^\nu p_{3\nu})}_u + \underbrace{p_1^\mu p_{2\mu}}_s m'^2 + \underbrace{p_3^\mu p_{4\mu}}_s m^2 + 2m'^2 m^2$$

Así la amplitud se reduce a:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 \propto \frac{6}{4} (m^2 + m'^2)^2 - (m^2 + m'^2) (t + u) + \frac{1}{4} (t^2 + u^2)$$

# Sección eficaz de producción de muones (III)

Por otro lado, como estamos en el centro de momenta:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 \propto (p_1^\mu p_{3\mu} p_2^\nu p_{4\nu} + p_1^\mu p_{4\mu} p_2^\nu p_{3\nu} + p_1^\mu p_{2\mu} m'^2 + p_3^\mu p_{4\mu} m^2 + 2m'^2 m^2)$$

Se puede trabajar cada una de las contracciones y así se obtiene:


$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \underbrace{\frac{8q^4}{(p_1 + p_2)^4}}_{s^2} (6m^2 m'^2 + 4(m^2 p_o^2 + m'^2 p_i^2) + 2p_i^2 p_o^2 (1 + \cos^2 \theta))$$

$$\text{Además: } p_i^2 = \frac{s - 4m^2}{4} \quad p_o^2 = \frac{s - 4m'^2}{4}$$


# Sección eficaz de producción de muones (IV)

Para simplificar el cálculo, vamos a considerar el límite ultrarelativista para electrones y muones:

$$E_e, p_e \gg m_e \quad E_\mu, p_\mu \gg m_\mu \quad p_i^2 = p_o^2 = \frac{s}{4}$$


$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{8q^4}{(p_1 + p_2)^4} (6m^2 m'^2 + 4(m^2 p_o^2 + m'^2 p_i^2) + 2p_i^2 p_o^2 (1 + \cos^2 \theta))$$

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{16q^4}{s^2} (p_i^2 p_o^2 (1 + \cos^2 \theta))$$


$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = q^4 (1 + \cos^2 \theta)$$

La sección eficaz diferencial es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q^4 (1 + \cos^2 \theta)}{64\pi^2 s} \frac{p_o}{p_i}$$

# Sección eficaz de producción de muones (V)

Ahora solo falta integrar en el ángulo sólido para obtener la sección eficaz total:

$$\sigma = \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi \frac{q^4 (1 + \cos^2 \theta)}{64\pi^2 s}$$

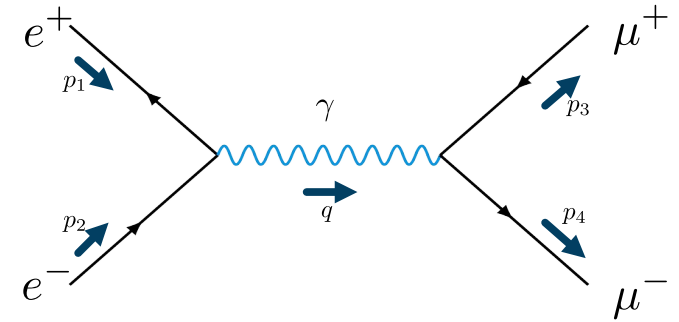
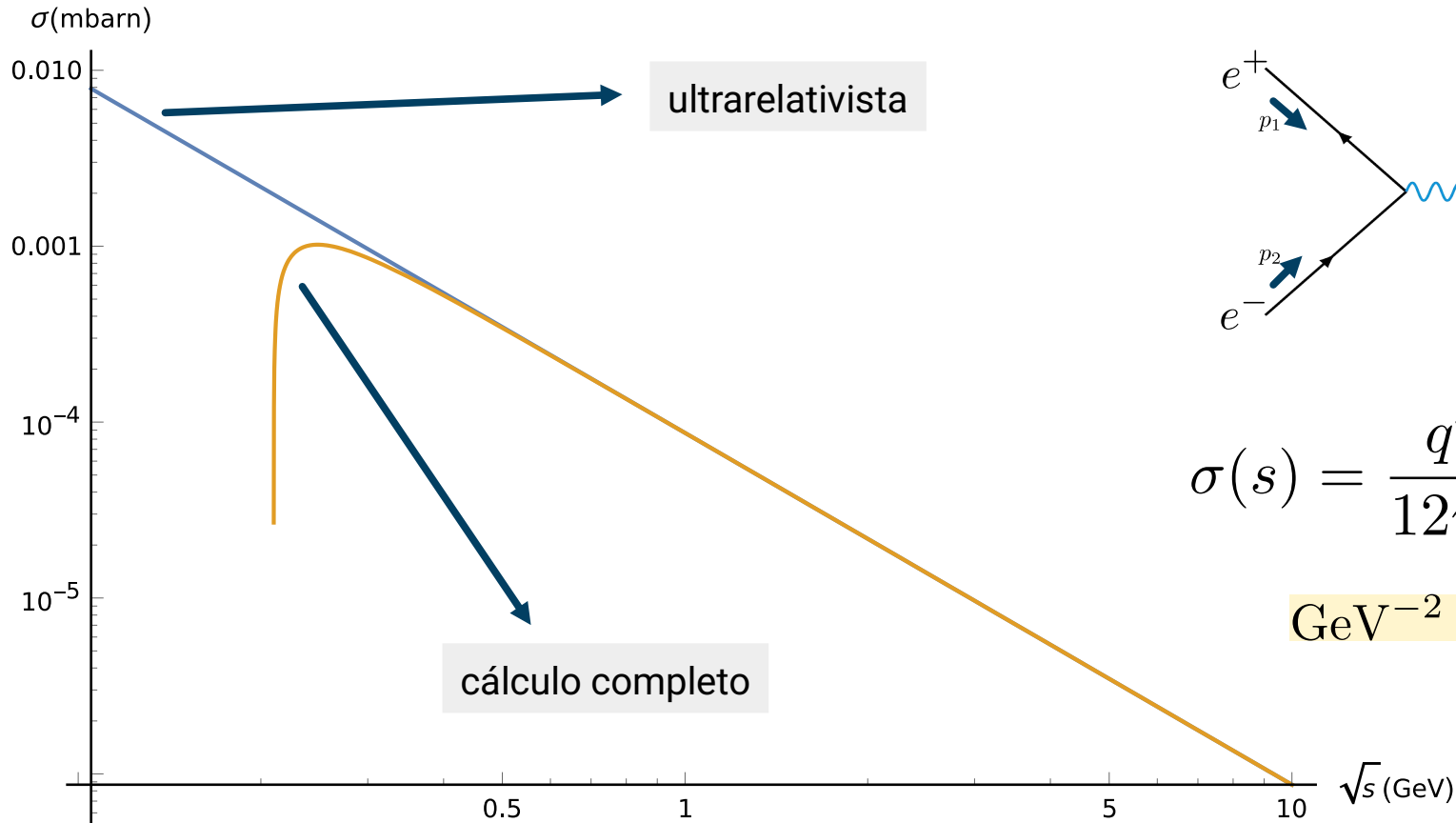
Así la sección eficaz corresponde a:

$$\sigma(s) = \frac{q^4}{12\pi s} = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha_{em}^2}{s}$$

donde la constante de estructura fina

$$\alpha_{em} = \frac{q^2}{4\pi} = \frac{1}{137.035999 \dots}$$

# Sección eficaz de producción de muones (VI)



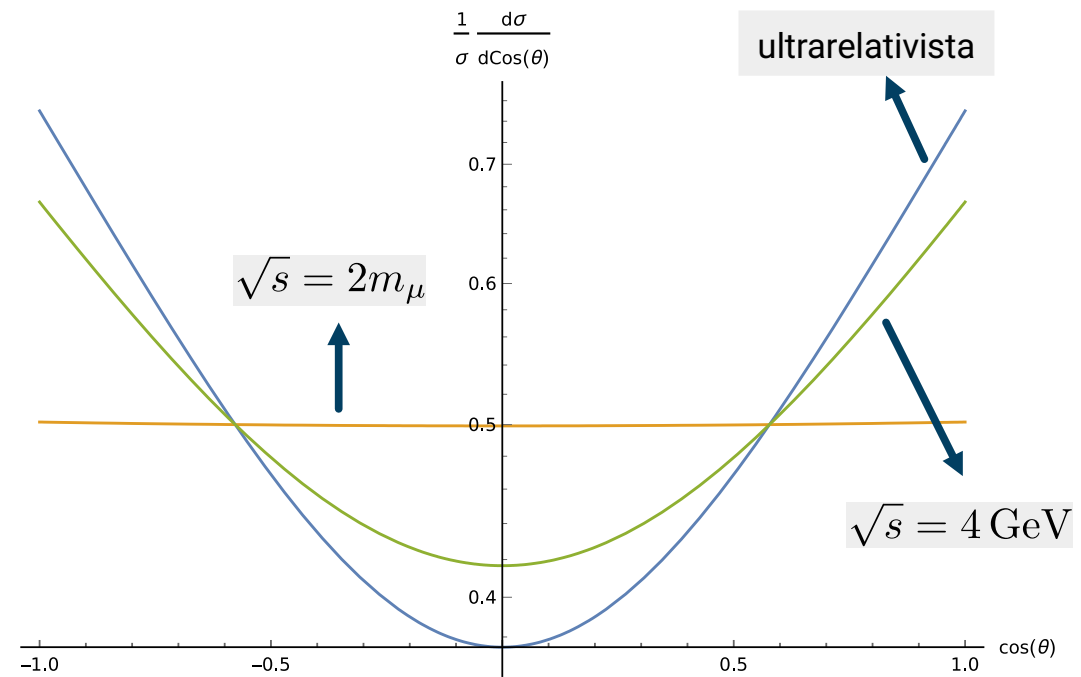
$$\sigma(s) = \frac{q^4}{12\pi s} = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha_{em}^2}{s}$$

$$\text{GeV}^{-2} = 0.389 \text{ mbarn}$$

# Sección eficaz de producción de muones (VII)

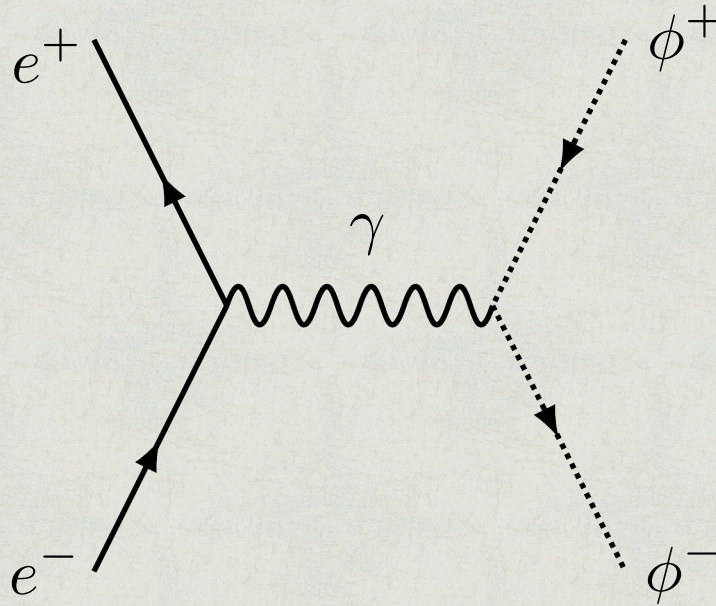
También podemos calcular la probabilidad en función del ángulo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \left( \frac{12\pi s}{q^4} \right) \frac{q^4(1 + \cos^2\theta)}{32\pi s} \\ &= \frac{3}{8} (1 + \cos^2\theta)\end{aligned}$$



# Ejercicios

Calcular la amplitud y sección eficaz del siguiente proceso.



Considere que el escalar cargado tiene la carga y la masa del electrón



DAFI-02255

# Introducción a la Física de Partículas

<https://robertolineros.com/teaching/fisica-de-particulas/>



Universidad Católica del Norte  
Departamento de Física

**DAFI-02255**

# Introducción a la Física de Partículas

**Roberto Lineros**

**Segundo Semestre 2020**

<https://robertolinerros.com/teaching/fisica-de-particulas/>

# Rompimiento espontáneo de la simetría (I)

Tomando como ejemplo el péndulo invertido.



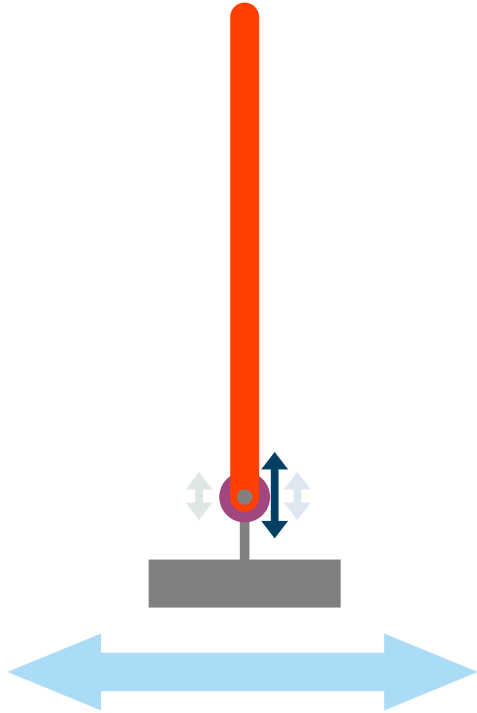
Mientras la vibración en su extremo inferior, el péndulo tiene una posición estable.

Al desactivar la vibración ese estado se vuelve inestable y el péndulo cae a un nuevo estado estable.

<https://www.youtube.com/watch?v=5oGYCxxgnHQ>



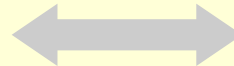
# Rompimiento espontáneo de la simetría (II)



Mientras la vibración se mantenga, el estado de estable (de menor energía).

Este estado es **simétrico** frente a las reflexiones

Izquierda



Derecha

# Rompimiento espontáneo de la simetría (III)

Al detener la vibración, el **nuevo estado estable** rompe la simetría de reflexión al escoger un lado.



# El vacío (I)

En mecánica cuántica y teoría de campos, el **vacío** corresponde a la configuración con menor energía i.e. estado fundamental.

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$$

El vacío va a ser homogéneo y estático en el sentido de un campo.

Además, al ser el estado de mínima energía corresponde al mínimo del potencial

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi} = 0 \quad \text{si} \quad \phi \rightarrow \langle \phi \rangle = v$$

# El vacío (II)

Considerando un campo escalar **real** y el siguiente **lagrangiano**:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4$$

Simetría  $\mathbb{Z}_2 : \phi \leftrightarrow -\phi$

Entonces al extremar el potencial:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi} = \phi(m^2 + \lambda \phi^2) = 0$$

Se obtiene que:  $\phi_1 = 0$  y  $\phi_2 = \pm \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}}$  solo  $\phi_1$  es solución si  $m^2 > 0$

# El vacío (III)

Considerando un campo escalar **real** pero con **término de masa** negativo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4$$

Simetría  $\mathbb{Z}_2 : \phi \leftrightarrow -\phi$

Entonces al extremar el potencial:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi} = \phi(-\mu^2 + \lambda \phi^2) = 0$$

Se obtiene que:  $\phi_1 = 0$  y  $\phi_2 = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$  ambas soluciones son compatibles



# El vacío (IV)

La segunda derivada nos indicará cual de las 2 soluciones es un mínimo.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \phi^2} = -\mu^2 + 3\lambda\phi^2$$

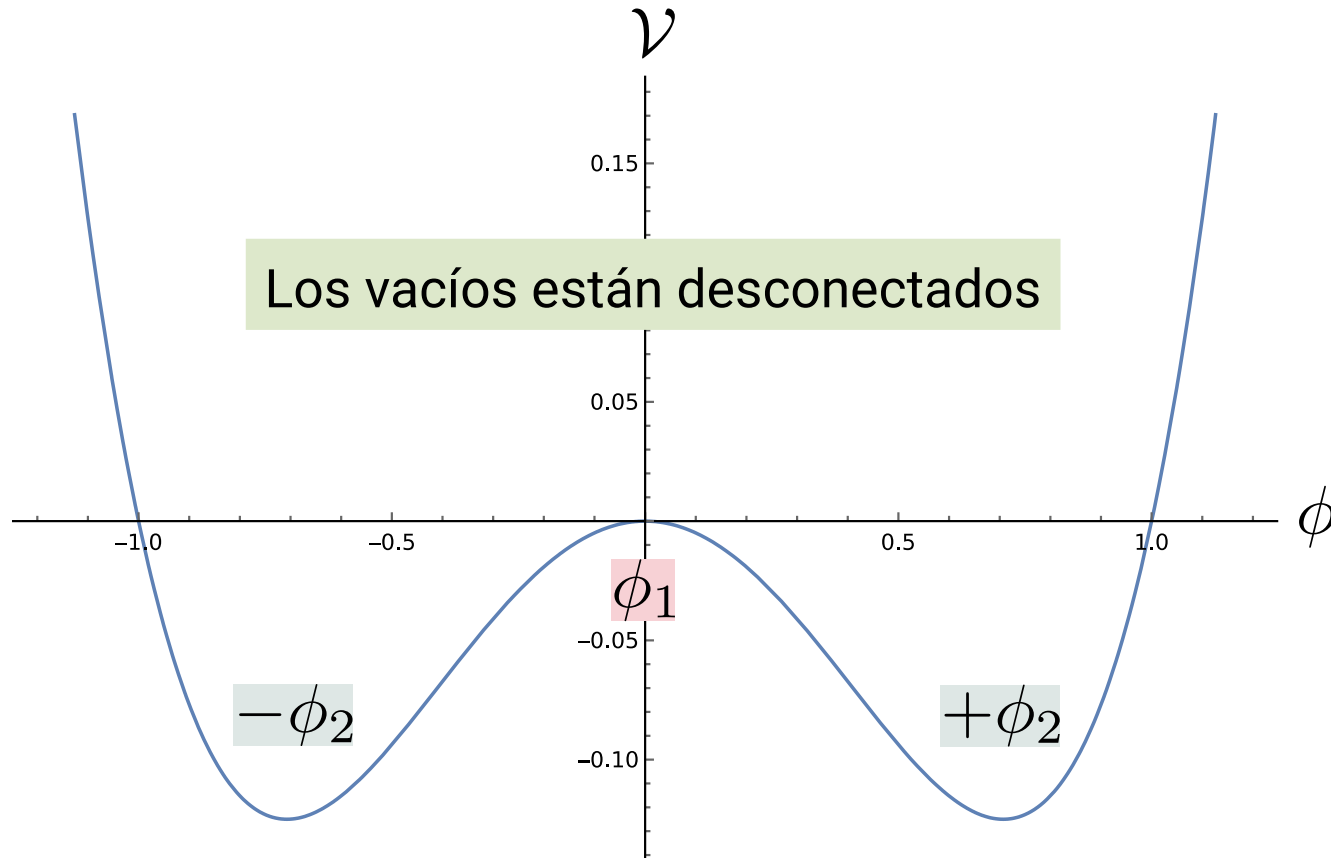
$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \phi^2} \right|_{\phi_1} = -\mu^2 < 0$$

Máximo local  
Inestable

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \phi^2} \right|_{\phi_2} = 2\mu^2 > 0$$

Mínimos locales  
Estable

# El vacío (V)



# El vacío (VI)

Si redefinimos el campo en torno al vacío:  $\phi = \pm\phi_2 + \eta$

El lagrangiano  $\mathbb{Z}_2$  simétrico:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4$$

La simetría  $\mathbb{Z}_2$  ya no es parte del lagrangiano, pero el nuevo campo tiene una masa física.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \frac{\mu^2}{2}\eta^2 \mp \sqrt{\mu^2\lambda}\eta^3 - \frac{\lambda}{4}\eta^4 + \frac{\mu^2}{4\lambda}$$

# Rompimiento de una simetría continua (I)

El lagrangiano de un campo escalar con simetría U(1) global.

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi + \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad \phi \rightarrow e^{i\theta} \phi$$

Mientras  $\lambda > 0$  y  $\mu^2 > 0$  sabemos que el mínimo del potencial no se encuentra en el origen.

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi} = \phi^* (-\mu^2 + 2\lambda \phi^* \phi)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \phi^*} = \phi (-\mu^2 + 2\lambda \phi^* \phi)$$


$$\phi_0^* \phi_0 = \frac{\mu^2}{2\lambda}$$

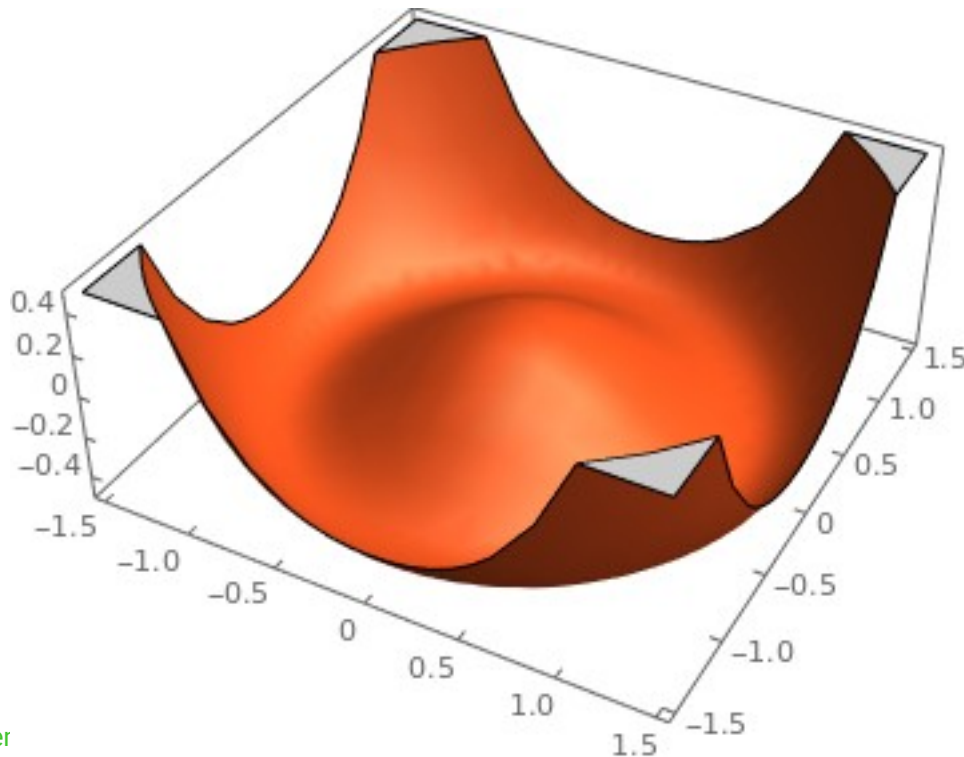


$$\phi_0 = \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}} e^{i\alpha}$$

U(1) simetría

# Rompimiento de una simetría continua (II)

Como el vacío tiene una simetría U(1) global. Vamos a suponer que el **valor de expectación del vacío** es real.



$$\phi = \frac{v + \sigma + i\chi}{\sqrt{2}}$$

$$\phi^* = \frac{v + \sigma - i\chi}{\sqrt{2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

# Rompimiento de una simetría continua (III)


El lagrangiano en esta nueva base corresponde:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi \partial^\mu \chi) - \frac{\mu^2}{2} \sigma^2 + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\sqrt{\lambda \mu^2} \sigma (\sigma^2 + \chi^2) - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \chi^2)^2$$

El campo escalar  $\sigma$  tiene masa  $\mu$

Mientras que el campo  $\chi$  es un campo sin masa.



Boson de  
Nambu-Goldstone

# Ejercicios

Usando el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\mu^2}{2} \phi^2 + \frac{\omega}{3} \phi^3 - \frac{\lambda}{4} \phi^4$$

Encuentre el vacío si:  $\mu^2 > 0, \omega > 0, \lambda > 0$

¿Qué condiciones deben cumplir para que el vacío sea estable?

# Rompimiento de una simetría de Gauge (I)

Si el lagrangiano de SQED con un potencial escalar que es susceptible al mecanismo de rompimiento espontáneo de la simetría:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - \mathcal{V} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{V} = -\mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$$

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$$

Recordar que este lagrangiano es  
**invariante U(1) local** con transformaciones:

$$\phi' = e^{i\theta(x)} \phi$$

$$A'^\mu = A^\mu + \frac{1}{q} \partial^\mu \theta(x)$$



# Rompimiento de una simetría de Gauge (II)

Debido al **nuevo vacío**, el campo escalar adquiere un valor de expectación no nulo y el campo escalar puede ser expandido en torno a ese **vev**:

$$\phi = \frac{v}{\sqrt{2}} + \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \sigma + i\chi) \quad \text{con} \quad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

Si nos fijamos en el término de las derivadas covariantes:

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi &= (\partial_\mu + iqA_\mu) \phi^* (\partial^\mu - iqA^\mu) \phi \\ &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + iqA_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) + q^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \end{aligned}$$

# Rompimiento de una simetría de Gauge (III)

Si consideramos los términos proporcionales al vev:

$$(D_\mu \phi)^* D^\mu \phi \rightarrow \frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu \quad \text{es decir} \quad \phi \rightarrow \frac{v}{\sqrt{2}}$$

Se ha generado un término bilineal para el campo  $A_\mu$

# Rompimiento de una simetría de Gauge (IV)

Si solo consideramos los términos que dependen únicamente del fotón:

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}q^2v^2A_\mu A^\mu$$

¡Hemos obtenido que el fotón ahora tiene masa!

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_A^2A_\mu A^\mu$$

Lagrangiano de Proca

# Rompimiento de una simetría de Gauge (V)

Aún nos queda ver lo que queda del lagrangiano, en especial el sector escalar:

$$\mathcal{L}_{\text{escalar}} = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi + \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu$$

para excluir el término de masa del fotón

La parte dependiente del potencial escalar:  $\mathcal{L}_{\text{pot}} = -\mathcal{V}$

$$\mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 = \frac{\lambda v^4}{4} - \lambda \left( \phi^* \phi - \frac{v^2}{2} \right)^2$$

el término constante no afecta a la dinámica

R. Lineros. Introducción a la física de partículas

$$v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

# Rompimiento de una simetría de Gauge (VI)

Gracias a la factorización todo queda mas simple:

$$\phi^* \phi - \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\chi^2 + v\sigma$$

$$\mu^2 = \lambda v^2$$

Así:

$$\begin{aligned} -\lambda \left( \phi^* \phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 &= -\lambda v^2 \sigma^2 - \lambda v \sigma^3 - \frac{\lambda}{4} \sigma^4 \\ &\quad - \lambda v \sigma \chi^2 - \frac{\lambda}{2} \sigma^2 \chi^2 - \frac{\lambda}{4} \chi^4 \end{aligned}$$

$$m_\sigma^2 = 2\lambda v^2$$

$$m_\chi^2 = 0$$

# Rompimiento de una simetría de Gauge (VII)

Aún nos quedan los términos que salen de la derivadas covariantes:

$$\begin{aligned}(D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - \frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi \\ &+ q^2 A_\mu A^\mu (\sigma^2 + \chi^2) \\ &- q A_\mu (v \partial^\mu \chi + \sigma \partial^\mu \chi - \chi \partial^\mu \sigma)\end{aligned}$$

La mayoría son términos de interacción entre 3 campos, términos de cinéticos, pero hay uno raro:

$$-q v A_\mu \partial^\mu \chi$$

Un término bilineal que mezcla el fotón  
y el boson de Nambu-Goldstone

# Rompimiento de una simetría de Gauge (VIII)

Centrándonos en los términos que dependen de los campos:  $\chi, A^\mu$

$$\mathcal{L} \supset \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - qv A_\mu \partial^\mu \chi + \frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu$$

Transformado en campo:  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{qv} \partial_\mu \chi$

$$-qv A_\mu \partial^\mu \chi \rightarrow -qv A_\mu \partial^\mu \chi - \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi$$

$$\frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu \rightarrow \frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + qv A_\mu \partial^\mu \chi$$

# Rompimiento de una simetría de Gauge (IX)

Al sumar todo, se pasa de:  $\mathcal{L} \supset \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - qv A_\mu \partial^\mu \chi + \frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu$

$$\text{a: } \mathcal{L} \supset \frac{1}{2} q^2 v^2 A_\mu A^\mu$$

Es decir que el bosón del Nambu-Goldstone fue absorbido por el fotón masivo.

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{qv} \partial_\mu \chi$$

Ahora el fotón masivo tiene una polarización longitudinal asociada con su masa.



# Fijación del Gauge (I)

Debido a la libertad debida a la simetría de Gauge, existe un término que se puede agregar al lagrangiano para evitar problemas debidos a esa libertad:

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

$\xi \rightarrow 0$	Gauge de Landau, equivalente al gauge de Lorentz
$\xi = 1$	Gauge de Feynman
$\xi = 3$	Gauge de Yennie

Gauge  $R_\xi$

# Fijación del Gauge (II)

Para el caso de boson de gauge masivos

$$\mathcal{L} \supset -\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu - \xi m_A \chi)^2$$

$$\xi \rightarrow 0$$

Gauge de Landau

$$\xi = 1$$

Gauge de Feynman

$$\xi = \infty$$

Gauge de T'Hooft

Los procesos son invariantes con respecto al valor de  $\xi$

# El Mecanismo de Higgs (I)

Los físicos **Robert Brout**, **François Englert**, **Peter Higgs** (entre otros) propusieron en la década de los 70's un mecanismo de rompimiento espontáneo de simetría que es pieza clave dentro del **Modelo Estándar**.



Brout



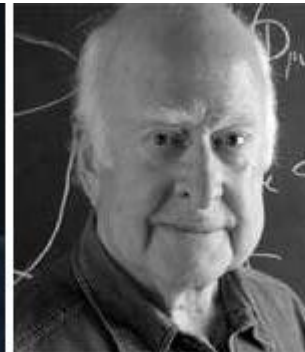
Englert



Guralnik



Hagen



Higgs

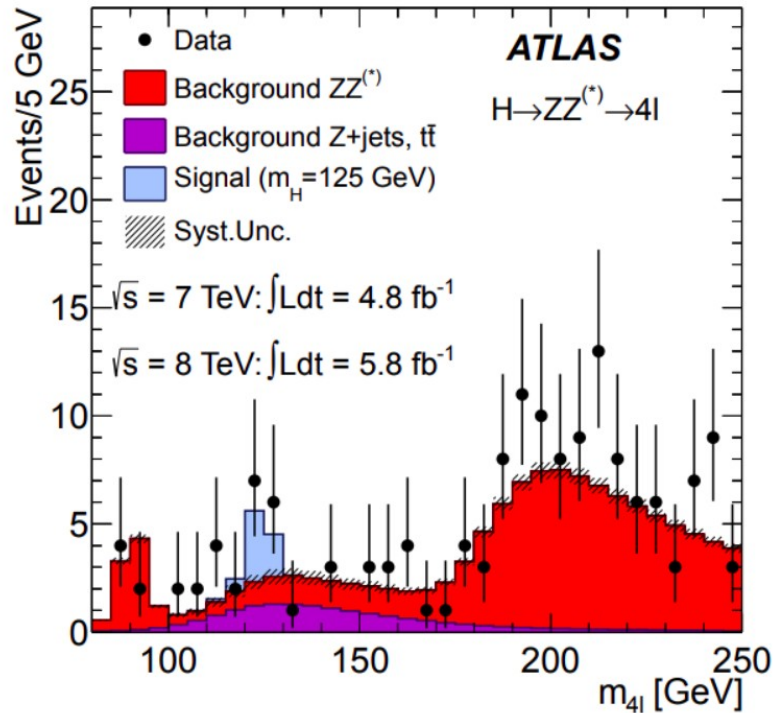


Kibble

<https://francis.naukas.com/2010/06/05/el-sexteto-de-higgs-premio-de-la-aps-en-honor-a-j-j-sakurai-y-la-historia-del-mecanismo-de-higgs/>

# El Mecanismo de Higgs (III)

<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.08.020>



<https://twitter.com/1cRebeca/status/1308459869868097536>



[https://www.youtube.com/watch?v=1LLWmw\\_rJZQ](https://www.youtube.com/watch?v=1LLWmw_rJZQ)

# El Mecanismo de Higgs (III)

El **mecanismo** de una explicación de como los bosones que se asocian a la **fuerza nuclear débil** adquieren masa, al igual que los fermiones del **Modelo Estándar**.

Simetría de Gauge

$$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$



Simetría de Gauge

$$SU(3)_c \times U(1)_{\text{EM}}$$

$$G_\mu^j \quad W_\mu^i \quad B_\mu$$

$$8 \quad 3 \quad 1$$

$$G_\mu^j \quad W_\mu^\pm \quad Z_\mu \quad A_\mu$$

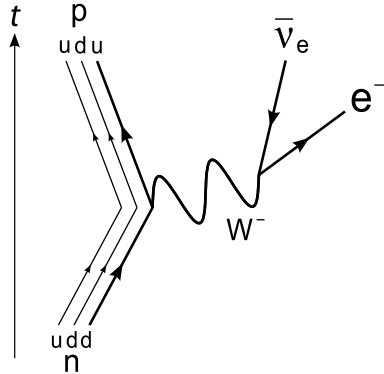
$$8 \quad 2 \quad 1 \quad 1$$

# Fuerza Nuclear Débil

La Fuerza Débil, responsable de los decaimientos radiactivos, ha servido para cuestionar muchas de las simetrías en física de partículas.



Chien-shiung Wu



El experimento de Wu que estudia el decaimiento beta del Cobalto viola la simetría de **Paridad**

La **Fuerza Débil** solo se acopla a los campos **Left-Handed**

# Grupo SU(N)

El grupo SU(N) se compone por el grupo de matrices unitarias y de determinante 1 que actúan sobre un vector de N componentes complejas.

$$U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}_{N \times N} \quad \det U = 1 \quad \Phi' = U \Phi$$

Cualquier elemento del grupo se puede construir a partir de los generadores de grupo:

$$U = \exp i \sum_a T^a \theta^a \quad [T^a, T^b] = i \sum_c^{N^2-1} f_{abc} T^c \quad \text{Álgebra de Lie}$$

# Grupo SU(2) (I)

Un caso muy conocido en física su álgebra es:

$$[\tau^i, \tau^j] = 2i\epsilon^{ijk} \tau^k$$

$$\tau^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tau^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \tau^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrices de Pauli

Las transformaciones del grupo SU(2) se construyen en base a las matrices de Pauli

$$U(\vec{\theta}) = \exp \left( \frac{i}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{\theta} \right)$$



## Grupo SU(2) (II)

Las matrices de Pauli están en la representación fundamental, es decir, actúan sobre objetos que se denominan **dobletes** de SU(2)

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \Phi' = \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = U(\vec{\theta}) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Entonces la estructura:

$$\Phi'^{\dagger} \Phi' = \Phi^{\dagger} \Phi \quad \text{es invariante de SU(2)}$$

# Teoría Electrodébil (I)

Históricamente, la teoría electrodébil se construye en base a la evidencia observacional.

Las transiciones nucleares seguían una lógica: transiciones que cambiaban el número isotópico entre núcleos

Se construyen los números cuánticos:

$I_3$  : Isospin débil

$Y$  : Hipercarga

# Teoría Electrodébil (II)

Además las partículas con isospín e hipercarga siguen una regla con su carga eléctrica:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$$

Fórmula de  
Gell-man–Nishijima

de tal manera que:

$$e_L : Q = -1$$

$$I_3 = -\frac{1}{2}, Y = -1$$

$$\nu_L : Q = 0$$

$$I_3 = +\frac{1}{2}, Y = -1$$

$$e_R : Q = -1$$

$$I_3 = 0, Y = -2$$

# Teoría Electro débil (III)

Entonces los leptones (y quarks) se pueden representar usando isospín e hipercarga.

$$L_e = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} ; e_R$$

Doblete isospín  
Hipercarga  $Y = -1$

Singlete isospín  
Hipercarga  $Y = -2$

# Bosones de gauge SU(2)×U(1) (I)

Cada simetría tiene sus propios bosones de gauge que están asociados a cada generador de grupo:

Hipercarga

$$U(1) : B_\mu$$

Isospín

$$SU(2) : W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3$$

Donde el lagrangiano con simetría U(1) local para el boson B:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$$

donde

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

# Bosones de gauge SU(2)×U(1) (II)

El lagrangiano con simetría SU(2) local para los bosones W es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu})$$

donde  $W^{\mu\nu} = \tau^a W^{a\mu\nu}$  y:

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g\epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c$$

acoplamiento de gauge

# Bosones de gauge SU(2)×U(1) (III)

La traza se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) &= W^{a\mu\nu} W_{\mu\nu}^b \text{Tr} (\tau^a \tau^b) \\ &= W^{a\mu\nu} W_{\mu\nu}^b 2\delta^{ab}\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} W^{a\mu\nu} W_{\mu\nu}^a$$

# Leptones en $SU(2) \times U(1)$ (I)

La evidencia experimental indica que la componente *Left* y *Right* son afectadas de manera distinta frente a la fuerza débil.

Recordando al lagrangiano de un fermión en la base *chiral*:

$$\mathcal{L} = i \left( \chi^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \right) + i \left( \xi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \xi \right) - m \left( \chi^\dagger \xi + \xi^\dagger \chi \right)$$

left-handed

right-handed

Término de masa

Donde:

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \rightarrow \chi \qquad \psi_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi \rightarrow \xi$$



# Leptones en SU(2)×U(1) (II)

El lagrangiano de un fermión en términos de espinores de 4 componentes:

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}_L i \gamma_\mu \partial^\mu \psi_L + \overline{\psi}_R i \gamma_\mu \partial^\mu \psi_R + m (\overline{\psi}_L \psi_R + \overline{\psi}_R \psi_L)$$

Si,  $\psi_L = e_L$ ,  $\psi_R = e_R$ , no habría problemas de agregar la interacción electromagnética.

Usando la derivada covariante:

$$\partial^\mu \rightarrow D^\mu = \partial^\mu - i q_e A^\mu$$

pero los bosones de Gauge son otros!

## Leptones en SU(2)×U(1) (III)

Los campos fundamentales en la teoría electrodébil son:  $L_e$ ,  $e_R$

El lagrangiano que es invariante **SU(2)×U(1) local** es:

$$\mathcal{L} = \overline{L_e} i \gamma_\mu D_L^\mu L_e + \overline{e_R} i \gamma_\mu D_R^\mu e_R - \frac{1}{8} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$$

donde:


$$D_L^\mu = \partial^\mu + iY \frac{g'}{2} B^\mu + i \frac{g}{2} \tau^i W^{i\mu} \quad D_R^\mu = \partial^\mu + iY \frac{g'}{2} B^\mu$$

# Leptones en SU(2)×U(1) (IV)

Las derivadas covariantes tienen “estructuras distintas” porque los campos  $L_e$  y  $e_R$  se acoplan de forma distinta a  $B$  y  $W$ .

$$D_R^\mu = \partial^\mu + iY \frac{g'}{2} B^\mu$$


Un escalar con respecto a SU(2)

$$D_L^\mu = \begin{pmatrix} \partial^\mu + iY \frac{g'}{2} B^\mu + i\frac{g}{2} W^{3\mu} & i\frac{g}{2} (W^{1\mu} - iW^{2\mu}) \\ i\frac{g}{2} (W^{1\mu} + iW^{2\mu}) & \partial^\mu + iY \frac{g'}{2} B^\mu - i\frac{g}{2} W^{3\mu} \end{pmatrix}$$


Una matriz de 2x2 con respecto a SU(2)

# Leptones en SU(2)×U(1) (IV)

Para simplificar notación, se define:

$$W_{\mu}^{+} = \frac{W_{\mu}^1 - iW_{\mu}^2}{\sqrt{2}} \quad W_{\mu}^{-} = \frac{W_{\mu}^1 + iW_{\mu}^2}{\sqrt{2}}$$

así se reduce la derivada covariante a:

$$D_L^{\mu} = \begin{pmatrix} \partial^{\mu} + iY\frac{g'}{2}B^{\mu} & 0 \\ 0 & \partial^{\mu} + iY\frac{g'}{2}B^{\mu} \end{pmatrix} + i\frac{g}{2} \begin{pmatrix} W^{3\mu} & \sqrt{2}W^{+\mu} \\ \sqrt{2}W^{-\mu} & -W^{3\mu} \end{pmatrix}$$

# Leptones en $SU(2) \times U(1)$ (V)

El lagrangiano para la parte *right-handed*:

$$\mathcal{L} \supset \bar{e}_R i \gamma_\mu D_R^\mu e_R$$

$$\mathcal{L} \supset \bar{e}_R i \gamma_\mu \left( \partial^\mu + iY \frac{g'}{2} B^\mu \right) e_R$$

como  $Y = -2$

$$\mathcal{L} \supset \bar{e}_R i \gamma_\mu (\partial^\mu - ig' B^\mu) e_R$$

# Leptones en SU(2)×U(1) (VI)

El lagrangiano para la parte *left-handed*: (con  $Y = -1$ )

$$\mathcal{L} = \overline{L}_e i \gamma_\mu D_L^\mu L_e = (\overline{\nu}_L, \overline{e}_L) i \gamma_\mu D_L^\mu \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$$

expandiendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset & \overline{\nu}_L i \gamma_\mu \left( \partial^\mu - i \frac{g'}{2} B^\mu \right) \nu_L + \overline{e}_L i \gamma_\mu \left( \partial^\mu - i \frac{g'}{2} B^\mu \right) e_L \\ & + (\overline{\nu}_L, \overline{e}_L) i \gamma_\mu \left( i \frac{g}{2} \begin{pmatrix} W^{3\mu} & \sqrt{2} W^{+\mu} \\ \sqrt{2} W^{-\mu} & -W^{3\mu} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Leptones en SU(2)×U(1) (VII)

Al juntar todo, se puede observar que:

$$\mathcal{L} \supset \bar{\nu}_L i \gamma_\mu \left( \partial^\mu - i \frac{g'}{2} B^\mu + i \frac{g}{2} W^{3\mu} \right) \nu_L$$

$$+ \bar{e}_L i \gamma_\mu \left( \partial^\mu - i \frac{g'}{2} B^\mu - i \frac{g}{2} W^{3\mu} \right) e_L$$

$$+ \bar{\nu}_L i \gamma_\mu \left( i \frac{g}{\sqrt{2}} W^{+\mu} \right) e_L + \bar{e}_L i \gamma_\mu \left( i \frac{g}{\sqrt{2}} W^{-\mu} \right) \nu_L$$

Interacciones que no  
corresponden al  
fotón ni al bosón Z

Interacciones de la fuerza débil

# Leptones en SU(2)×U(1) (VIII)

En el modelo se visualizan las nuevas interacciones entre los leptones y los bosones B y W.

Los términos de masa para los leptones:


$$\mathcal{L} \supset -m\overline{e}_R e_R - m'\overline{L}_e^T L_e$$

¡Son nulos y además no respetan la simetría SU(2)×U(1) local!



# Leptones en $SU(2) \times U(1)$ (IX)

Así que esta descripción en términos de la simetría  $SU(2) \times U(1)$  falla en:

- Los fermiones no tienen masa
- No contiene al fotón
- Los bosones  $W^+$ ,  $W^-$  no tienen masa
- El bosón  $Z$  no aparece.

$$m_\gamma = 0$$

$$m_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}$$

$$m_W = 80.379 \pm 0.012 \text{ GeV}$$

Es decir, aún no está completo!

# Ejercicios

Escribir el lagrangiano de los bosones W

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}W^{a\mu\nu}W_{\mu\nu}^a$$

en términos de los bosones:

$$W^3, W^+, W^-$$

# Rompimiento espontáneo de $SU(2) \times U(1)$ (I)

Vimos que el mecanismo de rompimiento espontáneo en SQED producía un fotón masivo.

Ahora vamos a considerar a un escalar que transforma frente a la simetría  $SU(2) \times U(1)$ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

en este caso un doblete de  $SU(2)$  con hipercarga  $Y$ .

# Rompimiento espontáneo de $SU(2) \times U(1)$ (II)

El lagrangiano que es invariante ante nuestras simetrías locales:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{4} W^{a\mu\nu} W_{\mu\nu}^a$$

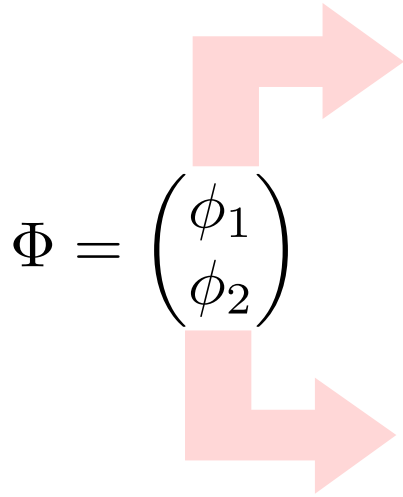
Donde, la transformación del campo escalar es:  $\Phi' = U(\theta)\Phi$

La **fórmula de Gell-man—Nishijima** nos indica que la hipercarga y el isospín no pueden tomar cualquier valor debido a la carga eléctrica:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$$

# Rompimiento espontáneo de $SU(2) \times U(1)$ (III)

Por lo tanto la asignación de la hipercarga es bastante clara:


$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} + \frac{Y}{2}$$

$$Q_2 = -\frac{1}{2} + \frac{Y}{2}$$

$$Y = 1$$

$$Q_1 = 1$$

$$Q_2 = 0$$

$$Y = -1$$

$$Q_1 = 0$$

$$Q_2 = -1$$

# Rompimiento espontáneo de SU(2)×U(1) (IV)

Vamos escoger el caso con  $Y = 1$ :  $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$   $\Phi^* = \begin{pmatrix} \phi^- \\ \phi^{0*} \end{pmatrix}$

Sabiendo que el potencial va a producir un vev en el doblete escalar:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (v + h + iG^0) \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the decomposition of the Higgs doublet  $\Phi$  into its components after spontaneous symmetry breaking:

- $G^+$  is labeled "escalar cargado" (charged scalar).
- $v + h$  is labeled "parte real" (real part).
- $iG^0$  is labeled "parte imaginaria" (imaginary part).

# Rompimiento espontáneo de SU(2)×U(1) (V)

Así la minimización del potencial se puede hacer en base a cada campo.

$$\mathcal{V} = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2$$

Ecuaciones de *Tadpole*:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial h} \right|_{\text{campos} \rightarrow 0} = t_h = v (v^2 \lambda - \mu^2)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial G^0} \right|_{\text{campos} \rightarrow 0} = t_{G^0} = 0$$

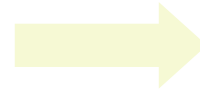
$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial G^+} \right|_{\text{campos} \rightarrow 0} = t_{G^+} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial G^-} \right|_{\text{campos} \rightarrow 0} = t_{G^-} = 0$$

# Rompimiento espontáneo de SU(2)×U(1) (VI)

Al resolver las ecuaciones de *tadpole* se obtiene la relación que ya conocíamos:

$$t_h = t_{G^0} = t_{G^+} = t_{G^-} = 0$$



$$\mu^2 = \lambda v^2$$

Además las segundas derivadas del potencial con respecto a los campos nos entregan los términos de masa.

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial h^2} \right|_{\text{campos} \rightarrow 0} = m_h^2 = 2\lambda v^2 > 0$$

boson de Higgs

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial G^{i2}} \right|_{\text{campos} \rightarrow 0} = 0$$

bosones de Nambu-Goldstone



# Bosones de gauge masivos (I)

La interacción entre el doblete escalar y los bosones de gauge ocurre en la **derivada covariante**, y los términos de masa aparecen gracias al **vev**:

$$(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) = \left( \partial_\mu - i \frac{g'}{2} B_\mu - i \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu \right) \Phi^\dagger \left( \partial^\mu + i \frac{g'}{2} B^\mu + i \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}^\mu \right) \Phi$$

Solo tomando el caso:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

# Bosones de gauge masivos (II)

Entonces en torno al vacío, los términos corresponden a:

$$D^\mu \Phi = \frac{i}{2\sqrt{2}} v \begin{pmatrix} g\sqrt{2}W^{+\mu} \\ g'B^\mu - gW^{3\mu} \end{pmatrix}$$

vector columna

$$(D^\mu \Phi)^\dagger = \frac{-i}{2\sqrt{2}} v \begin{pmatrix} g\sqrt{2}W^{-\mu} & g'B^\mu - gW^{3\mu} \end{pmatrix}$$

vector fila

Ya que la derivada covariante es una matriz:

$$D^\mu = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 2\partial^\mu + g'B^\mu + gW^{3\mu} & g\sqrt{2}W^{+\mu} \\ g\sqrt{2}W^{-\mu} & 2\partial^\mu + g'B^\mu - gW^{3\mu} \end{pmatrix}$$

# Masa de los bosones W

La multiplicación de ambos términos resulta:

$$(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) = \frac{v^2 g^2}{4} W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{v^2}{8} (g' B_\mu - g W_\mu^3) (g' B^\mu - g W^{3\mu})$$

¡Los bosones  $W^\pm$  ahora tienen masa!

$$m_W^2 = \frac{g^2}{4} v^2$$

Aún falta entender que pasa con los otros bosones

# Masa de los bosones A y Z (I)

El término que depende de B y  $W^3$  corresponde a:

$$\frac{v^2}{8} (g'^2 B_\mu B^\mu + g^2 W_\mu^3 W^{3\mu} - g'g B_\mu W^{3\mu} - g'g W_\mu^3 B^\mu)$$

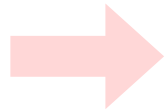
Los campos B y  $W^3$  están mezclados, es decir, no tienen estados de masa definida.

Es decir que el lagrangiano libre de cada bosón no se puede separar!

# Masa de los bosones A y Z (II)

Estos términos se pueden escribir como multiplicación de vectores y matrices:

$$\frac{v^2}{8} (g'^2 B_\mu B^\mu + g^2 W_\mu^3 W^{3\mu} - g'g B_\mu W^{3\mu} - g'g W_\mu^3 B^\mu)$$



$$\begin{aligned} & \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} B_\mu & W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'^2 & -g'g \\ -g'g & g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{3\mu} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} B_\mu & W_\mu^3 \end{pmatrix} \mathbf{M}^2 \begin{pmatrix} B^\mu \\ W^{3\mu} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es necesario **diagonalizar** la matriz para poder desacoplar los campos.

# Masa de los bosones A y Z (III)

La diagonalización se puede lograr mediante una rotación:

$$\begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} = R^T \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix}$$

de tal manera que:

$$R M^2 R^T = \begin{pmatrix} m_A^2 & 0 \\ 0 & m_Z^2 \end{pmatrix}$$

# Masa de los bosones A y Z (IV)

Hay que resolver este sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g'^2 & -g'g \\ -g'g & g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_A^2 & 0 \\ 0 & m_Z^2 \end{pmatrix}$$

Resolviendo las ecuaciones de los términos fuera de la diagonal, se obtiene que:

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \tan \theta_W = \frac{g'}{g}$$

A  $\theta_W$  se le conoce como el **ángulo de Weinberg**

# Masa de los bosones A y Z (V)

Al realizar la multiplicación matricial:

$$R \mathbf{M}^2 R^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} (g^2 + g'^2) v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_A^2 & 0 \\ 0 & m_Z^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$m_A^2 = 0 \quad m_Z^2 = \frac{1}{4} (g^2 + g'^2) v^2$$

Es decir, uno de los bosones tiene masa nula y el otro no.



# Masa de los bosones A, Z y W

El mecanismo de Higgs nos entrega 3 bosones masivos y 1 sin masa:

$$m_A^2 = 0 \quad m_Z^2 = \frac{1}{4} (g^2 + g'^2) v^2 \quad m_W^2 = \frac{g^2}{4} v^2$$

Además las masas están amarradas:

$$m_W = \cos \theta_W m_Z$$

$$m_Z \simeq 91.1876 \text{ GeV}$$

$$m_W \simeq 80.379 \text{ GeV}$$

$$\cos \theta_W \simeq 0.8816 \rightarrow \theta_W \simeq 28.18^\circ$$

# Términos cinéticos de los bosones (I)

Después del rompimiento espontáneo de la simetría, nuestro lagrangiano luce:

$$\mathcal{L} \supset m_W^2 W^{+\mu} W_{\mu}^{-} + \frac{m_Z^2}{2} Z^{\mu} Z_{\mu} - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{4} W^{a\mu\nu} W_{\mu\nu}^a$$

Hay que escribir los términos cinéticos en función de los campos autoestados de masa:

$$A_{\mu} \quad Z_{\mu} \quad W_{\mu}^{+} \quad W_{\mu}^{-}$$

# Términos cinéticos de los bosones (II)

Donde:

$$B_\mu = \cos \theta_W A_\mu - \sin \theta_W Z_\mu$$

$$W_\mu^3 = \sin \theta_W A_\mu + \cos \theta_W Z_\mu$$

$$W_\mu^1 = \frac{W_\mu^+ + W_\mu^-}{\sqrt{2}}$$

$$W_\mu^2 = i \frac{W_\mu^+ - W_\mu^-}{\sqrt{2}}$$

Así:

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu = \cos \theta_W F_{\mu\nu} - \sin \theta_W Z_{\mu\nu}$$

$$B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = \cos^2 \theta_w F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sin^2 \theta_W Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - 2 \cos \theta_W \sin \theta_W F_{\mu\nu} Z^{\mu\nu}$$

# Términos cinéticos de los bosones (III)

Los bosones de SU(2):  $W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g\epsilon^{abc}W_\mu^b W_\nu^c$

Al escribirlos explícitamente:

$$W_{\mu\nu}^1 = \partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1 - g(W_\mu^2 W_\nu^3 - W_\mu^3 W_\nu^2)$$

$$W_{\mu\nu}^2 = \partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2 - g(W_\mu^3 W_\nu^1 - W_\mu^1 W_\nu^3)$$

$$W_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu W_\nu^3 - \partial_\nu W_\mu^3 - g(W_\mu^1 W_\nu^2 - W_\mu^2 W_\nu^1)$$

# Términos cinéticos de los bosones (IV)

Al hacer los reemplazos:

$$W_{\mu\nu}^3 = \sin \theta_W F_{\mu\nu} + \cos \theta_W Z_{\mu\nu} - ig (W_{\mu}^{-} W_{\nu}^{+} - W_{\mu}^{+} W_{\nu}^{-})$$

Y el término cinético:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^3 W^{3\mu\nu} = & \sin^2 \theta_W F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \cos^2 \theta_W Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + 2 \sin \theta_W \cos \theta_W F_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} \\ & - 2g^2 (W_{\mu}^{-} W^{-\mu} W_{\nu}^{+} W^{+\nu} - W_{\mu}^{-} W^{+\mu} W_{\nu}^{-} W^{-\nu}) \\ & - 2ig (\sin \theta_W F_{\mu\nu} + \cos \theta_W Z_{\mu\nu}) (W^{-\mu} W^{+\nu} - W^{+\mu} W^{-\nu}) \end{aligned}$$

# Términos cinéticos de los bosones (V)

Realizando lo mismo con los otros términos, se pasa de:

$$\mathcal{L} \supset m_W^2 W^{+\mu} W_{\mu}^{-} + \frac{m_Z^2}{2} Z^{\mu} Z_{\mu} - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{4} W^{a\mu\nu} W_{\mu\nu}^a$$

A:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset & -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} + \frac{m_Z^2}{2} Z^{\mu} Z_{\mu} \\ & - \frac{1}{2} W^{+\mu\nu} W_{\mu\nu}^{-} + m_W^2 W^{+\mu} W_{\mu}^{-} + \mathcal{L}_{\text{int}} \end{aligned}$$

# Interacción con los leptones (I)

Se había visto que el lagrangiano de interacción con los leptones correspondía a:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\supset \overline{L}_e i\gamma_\mu D_L^\mu L_e + \overline{e}_R i\gamma_\mu D_R^\mu e_R \\ &\supset (\overline{\nu}_L, \overline{e}_L) i\gamma_\mu D_L^\mu \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + \overline{e}_R i\gamma_\mu D_R^\mu e_R\end{aligned}$$

Donde dentro de las derivadas covariantes está contenida la interacción con los bosones de Gauge.

# Interacción con los leptones (II)

Ese lagrangiano corresponde a:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \supset & \bar{\nu}_L i \gamma_\mu \left( \partial^\mu - i \frac{g'}{2} B^\mu + i \frac{g}{2} W^{3\mu} \right) \nu_L \\ & + \bar{e}_L i \gamma_\mu \left( \partial^\mu - i \frac{g'}{2} B^\mu - i \frac{g}{2} W^{3\mu} \right) e_L + \bar{e}_R i \gamma_\mu (\partial^\mu - i g' B^\mu) e_R \\ & + \bar{\nu}_L i \gamma_\mu \left( i \frac{g}{\sqrt{2}} W^{+\mu} \right) e_L + \bar{e}_L i \gamma_\mu \left( i \frac{g}{\sqrt{2}} W^{-\mu} \right) \nu_L\end{aligned}$$



# Interacción con los leptones (III)

Considerando la parte que depende del neutrino:

$$\overline{\nu_L} \left( \partial^\mu - i \frac{g'}{2} B^\mu + i \frac{g}{2} W^{3\mu} \right) \nu_L$$

$$\overline{\nu_L} \left( \partial^\mu + \frac{i}{2} \underbrace{(g \sin \theta_W - g' \cos \theta_W)}_{\text{acoplamiento con A}} A^\mu + \frac{i}{2} \underbrace{(g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W)}_{\text{acoplamiento con Z}} Z^\mu \right) \nu_L$$

acoplamiento con A

acoplamiento con Z

# Interacción con los leptones (IV)

Usando la relación entre seno y coseno con los acoplamientos  $g$  y  $g'$ :

$$\begin{aligned} g \sin \theta_W - g' \cos \theta_W &= g \left( \frac{g'}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \right) - g' \left( \frac{g}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{acoplamiento con A}}$$

$$\begin{aligned} g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W &= g \left( \frac{g}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \right) + g' \left( \frac{g'}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \right) \\ &= \sqrt{g'^2 + g^2} = \frac{g}{\cos \theta_W} \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{acoplamiento con Z}}$$

# Interacción con los leptones (V)

Entonces:

$$\overline{\nu_L} \left( \partial^\mu - i \frac{g'}{2} B^\mu + i \frac{g}{2} W^{3\mu} \right) \nu_L$$

Corresponde a:

$$\overline{\nu_L} \left( \partial^\mu + i \frac{g}{2 \cos \theta_W} Z^\mu \right) \nu_L$$

El neutrino sólo se acopla al bosón Z!

# Interacción con los leptones (V)

Ahora si se procede de manera similar con la parte del electrón:

$$\overline{e}_L i \gamma_\mu \left( \partial^\mu - i \frac{g'}{2} B^\mu - i \frac{g}{2} W^{3\mu} \right) e_L + \overline{e}_R i \gamma_\mu (\partial^\mu - i g' B^\mu) e_R$$

Los términos dependiente de los bosones de gauge quedan:

$$g' B^\mu + g W^{3\mu} = 2g' \cos \theta_W A^\mu + \frac{g}{\cos \theta_W} (\cos^2 \theta_W - \sin^2 \theta_W) Z^\mu$$

$$g' B^\mu = g' \cos \theta_W A^\mu - g' \sin \theta_W Z^\mu$$

# Interacción con los leptones (VI)

Por lo tanto, el lagrangiano para el electrón:

$$\begin{aligned} & \bar{e}_L i \gamma_\mu \left( \partial^\mu - i g' \cos \theta_W A^\mu - i \frac{g}{2 \cos \theta_W} (\cos^2 \theta_W - \sin^2 \theta_W) Z^\mu \right) e_L \\ & + \bar{e}_R i \gamma_\mu (\partial^\mu - i g' \cos \theta_W A^\mu + i g' \sin \theta_W Z^\mu) e_R \end{aligned}$$

Las componente *left* y *right* se pueden relacionar con el espinor de Dirac:

$$e_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi_e \quad e_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi_e$$

# Interacción con los leptones (VII)

Entonces el lagrangiano para el electrón se puede escribir:

$$\bar{\psi}_e i\gamma_\mu (\partial^\mu - ig' \cos \theta_W A^\mu) \psi_e + \bar{\psi}_e i\gamma_\mu (-ig_L^Z Z^\mu) e_L + \bar{\psi}_e i\gamma_\mu (-ig_R^Z Z^\mu) e_R$$

Donde:

$$g_L^Z = \frac{g}{2 \cos \theta_W} (\cos^2 \theta_W - \sin^2 \theta_W) \quad g_R^Z = -g' \sin \theta_W$$

que implica que el bosón Z se acopla de forma distinta a la componente *left* y *right*

# Interacción con los leptones (VIII)

Si nos fijamos en:

$$\bar{\psi}_e i\gamma_\mu (\partial^\mu - ig' \cos \theta_W A^\mu) \psi_e$$

y lo comparamos a QED:

$$\bar{\psi} i\gamma_\mu (\partial^\mu - iqA^\mu) \psi$$

Si la carga eléctrica del electrón:  $e = g' \cos \theta_W$

**¡Obtenemos la interacción electromagnética!**

# Ejercicios

Escriba el lagrangiano de los electrones con el bosón Z en términos de los acoplamientos vectorial y axial:

$$\mathcal{L}_{Ze} = \bar{\psi}_e i\gamma_\mu (-ig_V^Z Z^\mu) \psi_e + \bar{\psi}_e i\gamma_\mu (-ig_A^Z Z^\mu \gamma_5) \psi_e$$



# Términos de masa de los fermiones (I)

En el modelo con simetría  $SU(2) \times U(1)$ , no se puede escribir un término de masas los fermiones cargados:

$$\mathcal{L} \supset -m_f \overline{\psi}_f \psi_f$$

El lagrangiano de masa para el electrón corresponde:

$$\mathcal{L} \supset -m_e (\overline{e}_R e_L + \overline{e}_L e_R)$$

pero  $e_L$  pertenece al doblete  $L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$  y  $e_R$  es un singlete.

# Términos de masa de los fermiones (II)

Para poder escribir un término de masa en el modelo simétrico, este tiene que ser invariante ante  $SU(2) \times U(1)$ .

Usando el *doblete* y el *singlete* se pueden construir los términos:

$$\overline{L}e_R \quad \overline{e_R}L$$

Ambos términos transforman bajo las simetrías ya que:

$$L' = \exp\left(-i\frac{g}{2}\tau^a\theta^a + i\frac{g}{2}\alpha\right)L \quad e'_R = \exp(ig'\alpha)e_R$$

# Términos de masa de los fermiones (III)

Cada uno de los términos tiene una forma particular de transformar:

$$\overline{L}' e'_R = \left( \overline{L} \exp \left( i \frac{g}{2} \tau^a \theta^a - i \frac{g'}{2} \alpha \right) \right) \left( \exp (i g' \alpha) e_R \right) = \overline{L} e_R \exp \left( i \frac{g}{2} \tau^a \theta^a + i \frac{g'}{2} \alpha \right)$$

$$\overline{e'_R} L' = \left( \overline{e_R} \exp (-i g' \alpha) \right) \left( \exp \left( -i \frac{g}{2} \tau^a \theta^a + i \frac{g'}{2} \alpha \right) L \right) = \exp \left( -i \frac{g}{2} \tau^a \theta^a - i \frac{g'}{2} \alpha \right) \overline{e_R} L$$

La transformación resultante tiene forma conocida.

# Términos de masa de los fermiones (IV)

El doblete escalar usado para romper espontáneamente la simetría tiene hipercarga  $Y=1$ .

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \Phi' = \exp \left( -i \frac{g}{2} \tau^a \theta^a - i \frac{g'}{2} \alpha \right) \Phi$$

Así que:

$$\bar{L}' e'_R \Phi' = \bar{L} e_R \exp \left( i \frac{g}{2} \tau^a \theta^a + i \frac{g'}{2} \alpha \right) \exp \left( -i \frac{g}{2} \tau^a \theta^a - i \frac{g'}{2} \alpha \right) \Phi$$

$$\bar{L}' e'_R \Phi' = \bar{L} e_R \Phi$$

Es invariante de  $SU(2) \times U(1)$ !

# Términos de masa de los fermiones (V)

El lagrangiano de interacción invariante  $SU(2) \times U(1)$  corresponde:

$$\mathcal{L} \supset -y_e \bar{L} \Phi e_R - \underbrace{y_e^* \bar{e}_R \Phi^\dagger L}_{h.c.}$$

Donde formalmente:

$$\mathcal{L} \supset -y_e \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{e}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} e_R - y_e^* \bar{e}_R (\phi^- \phi^{0*}) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$$

# Términos de masa de los fermiones (VI)

Considerando los términos proporcionales al vev:  $\phi^0 = \frac{v}{\sqrt{2}}$

$$\mathcal{L} \supset -y_e \bar{e}_L \phi^0 e_R - y_e^* \bar{e}_R \phi^{0*} e_L \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L} \supset -\frac{y_e v}{\sqrt{2}} \bar{e}_L e_R - \frac{y_e^* v}{\sqrt{2}} \bar{e}_R e_L$$

(fase CP que se absorbe)

Así identificamos que el electrón obtiene una masa gracias al vev del Higgs.

$$\mathcal{L} \supset -\frac{y_e v}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \qquad m_e = \frac{y_e v}{\sqrt{2}}$$

# Términos de masa de los fermiones (VII)

Por su lado, el neutrino no tiene un término proporcional al vev.

Es decir que en la teoría electrodébil los neutrinos son partículas sin masa:

$$m_\nu = 0$$

# Leptones en la Teoría EW (I)

Existen 3 familias de leptones con idénticas cargas electrodébiles

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \overline{L}_e i \not{D}_L L_e + \overline{e}_R i \not{D}_R e_R + \overline{L}_\mu i \not{D}_L L_\mu + \overline{\mu}_R i \not{D}_R \mu_R \\ & + \overline{L}_\tau i \not{D}_L L_\tau + \overline{\tau}_R i \not{D}_R \tau_R \\ & - y_e \overline{L}_e \Phi e_R - y_\mu \overline{L}_\mu \Phi \mu_R - y_\tau \overline{L}_\tau \Phi \tau_R + h.c. \\ & - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{4} W^{a\mu\nu} W_{\mu\nu}^a\end{aligned}$$

Interacciones

Masas

Bosones de Gauge



# Leptones en la Teoría EW (II)

No es difícil darse cuenta de la estructura de los leptones más pesados.

Doblete SU(2)  
Hipercarga Y=-1

$$\left\{ \begin{array}{l} L_e = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \\ L_\mu = \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix} \\ L_\tau = \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{array} \right.$$

Singlete SU(2)  
Hipercarga Y=-2

# Leptones en la Teoría EW (III)

Se diferencian por las masas:

$$m_e = \frac{y_e v}{\sqrt{2}} \simeq 0.5 \text{ MeV}$$

$$m_\mu = \frac{y_\mu v}{\sqrt{2}} \simeq 105 \text{ MeV}$$

$$m_\tau = \frac{y_\tau v}{\sqrt{2}} \simeq 1.7 \text{ GeV}$$

**e**

$$J = \frac{1}{2}$$

Mass  $m = (548.579909070 \pm 0.000000016) \times 10^{-6} \text{ u}$

Mass  $m = 0.5109989461 \pm 0.0000000031 \text{ MeV}$

$|m_{e^+} - m_{e^-}|/m < 8 \times 10^{-9}$ , CL = 90%

$|q_{e^+} + q_{e^-}|/e < 4 \times 10^{-8}$

Magnetic moment anomaly

$(g-2)/2 = (1159.65218091 \pm 0.00000026) \times 10^{-6}$

$(g_{e^+} - g_{e^-}) / g_{\text{average}} = (-0.5 \pm 2.1) \times 10^{-12}$

Electric dipole moment  $d < 0.11 \times 10^{-28} \text{ e cm}$ , CL = 90%

Mean life  $\tau > 6.6 \times 10^{28} \text{ yr}$ , CL = 90% [a]

**$\mu$**

$$J = \frac{1}{2}$$

Mass  $m = 0.1134289257 \pm 0.0000000025 \text{ u}$

Mass  $m = 105.6583745 \pm 0.00000024 \text{ MeV}$

Mean life  $\tau = (2.1969811 \pm 0.00000022) \times 10^{-6} \text{ s}$

$\tau_{\mu^+}/\tau_{\mu^-} = 1.00002 \pm 0.00008$

$c\tau = 658.6384 \text{ m}$

Magnetic moment anomaly  $(g-2)/2 = (11659209 \pm 6) \times 10^{-10}$

$(g_{\mu^+} - g_{\mu^-}) / g_{\text{average}} = (-0.11 \pm 0.12) \times 10^{-8}$

Electric dipole moment  $|d| < 1.8 \times 10^{-19} \text{ e cm}$ , CL = 95%

**$\tau$**

$$J = \frac{1}{2}$$

Mass  $m = 1776.86 \pm 0.12 \text{ MeV}$

$(m_{\tau^+} - m_{\tau^-})/m_{\text{average}} < 2.8 \times 10^{-4}$ , CL = 90%

Mean life  $\tau = (290.3 \pm 0.5) \times 10^{-15} \text{ s}$

$c\tau = 87.03 \text{ }\mu\text{m}$

Magnetic moment anomaly  $> -0.052$  and  $< 0.013$ , CL = 95%

$\text{Re}(d_\tau) = -0.220$  to  $0.45 \times 10^{-16} \text{ e cm}$ , CL = 95%

$\text{Im}(d_\tau) = -0.250$  to  $0.0080 \times 10^{-16} \text{ e cm}$ , CL = 95%

**Weak dipole moment**

$\text{Re}(d_\tau^W) < 0.50 \times 10^{-17} \text{ e cm}$ , CL = 95%

$\text{Im}(d_\tau^W) < 1.1 \times 10^{-17} \text{ e cm}$ , CL = 95%

**Weak anomalous magnetic dipole moment**

$\text{Re}(\alpha_\tau^W) < 1.1 \times 10^{-3}$ , CL = 95%

$\text{Im}(\alpha_\tau^W) < 2.7 \times 10^{-3}$ , CL = 95%

$\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm K_S^0 \nu_\tau$  (RATE DIFFERENCE) / (RATE SUM) =  $(-0.36 \pm 0.25)\%$

# Leptones en la Teoría EW (IV)

Además en la teoría electrodébil el número leptónico por familias se conserva:

$$\#L = \#L_e + \#L_\mu + \#L_\tau$$

$$\#L_e = 1 : e_R, e_L, \nu_{eL}$$

$$\#L_e = -1 : (e_R)^c, (e_L)^c, (\nu_{eL})^c$$

$$\#L_\mu = 1 : \mu_R, \mu_L, \nu_{\mu L}$$

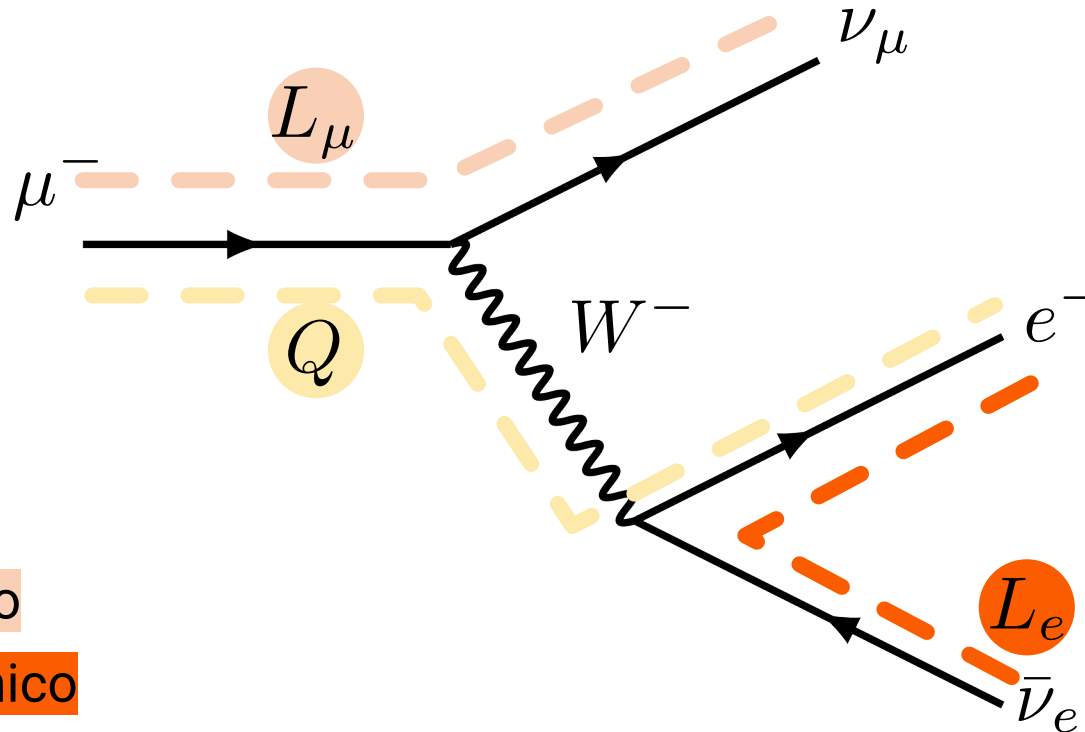
$$\#L_\mu = -1 : (\mu_R)^c, (\mu_L)^c, (\nu_{\mu L})^c$$

$$\#L_\tau = 1 : \tau_R, \tau_L, \nu_{\tau L}$$

$$\#L_\tau = -1 : (\tau_R)^c, (\tau_L)^c, (\nu_{\tau L})^c$$

# Leptones en la Teoría EW (V)

Por ejemplo, en el decaimiento del muón



Carga eléctrica

Número muónico

Número electrónico

# Quarks en la teoría EW (I)

Los *quarks* son fermiones que conforman a los hadrones.

Bariones:  $qqq$

Mesones:  $q\bar{q}$

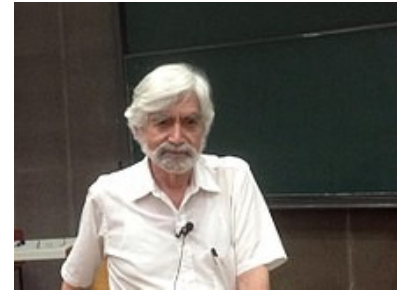
El modelo de quarks fue propuesto por Gell–Mann y Zweig en 1964



Pastel de quark  
Quarkstrudel



Murray Gell–Mann



George Zweig

Y descubiertas en 1968 en el colisionador SLAC

# Quarks en la teoría EW (II)

Los bariones y mesones son estados ligados debido al **confinamiento** que produce la fuerza nuclear fuerte a bajas energías.

En existen 6 sabores de quarks en 3 familias:


$Q = 2/3$			$u$	$c$	$t$			
			$d$	$s$	$b$	$Q = -1/3$		
			F1	F2	F3			

# Quarks en la teoría EW (III)

Usando la fórmula de Gell–Mann Nishijima:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$$

Y motivado por la estructura de los leptones en  $SU(2) \times U(1)$ , para la primera familia:

$$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$$


Doblete  $SU(2)$  con  
hipercarga  $Y = 1/3$

$u_R$



Singlete con  $Y = 4/3$

$d_R$



Singlete con  $Y = -2/3$

# Quarks en la teoría EW (IV)

Conociendo las cargas  $SU(2) \times U(1)$  de los *quarks*, entonces el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \overline{Q} i \not{D}_L Q + \overline{u}_R i \not{D}_R^u u_R + \overline{d}_R i \not{D}_R^d d_R - y_d \overline{Q} \Phi d_R - y_u \overline{Q} \tilde{\Phi} u_R + h.c.$$

Donde

$$D_{\mu L} = \partial_\mu - i \frac{g}{2} \tau^a W_\mu^a - i Y_Q \frac{g'}{2} B_\mu$$

$$D_{\mu R}^u = \partial_\mu - i Y_u \frac{g'}{2} B_\mu$$

$$D_{\mu R}^d = \partial_\mu - i Y_d \frac{g'}{2} B_\mu$$



# Quarks en la teoría EW (V)

La masa de los *quarks* se genera a través del mecanismo de Higgs

$$\mathcal{L} \supset - y_d \overline{Q} \Phi d_R - y_d^* \overline{d_R} \Phi^\dagger Q - y_u \overline{Q} \tilde{\Phi} u_R - y_u^* \overline{u_R} \tilde{\Phi}^\dagger Q$$

Notar que los términos para el  $u$  dependen de:  $\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^*$

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^- \\ \phi^{0*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}$$

# Quarks en la teoría EW (VI)

El doblete escalar tilde transforma bajo  $SU(2) \times U(1)$  según:

$$\Phi' = \exp \left( -i \frac{g}{2} \tau^a \theta^a - i \frac{g'}{2} \alpha \right) \Phi$$

doblete  $SU(2)$  con hipercarga  $Y=1$

$$\widetilde{\Phi}' = i\tau^2 \exp \left( i \frac{g}{2} \tau^{a*} \theta^a + i \frac{g'}{2} \alpha \right) \Phi^* = \exp \left( -i \frac{g}{2} \tau^a \theta^a + i \frac{g'}{2} \alpha \right) i\tau^2 \Phi^*$$

$$\widetilde{\Phi}' = \exp \left( -i \frac{g}{2} \tau^a \theta^a + i \frac{g'}{2} \alpha \right) \widetilde{\Phi}$$

transforma como doblete  $SU(2)$  con hipercarga  $Y=-1$

# Quarks en la teoría EW (VII)

Así todos los términos son invariantes  $SU(2) \times U(1)$ :

$$\mathcal{L} \supset - y_d \overline{Q} \Phi d_R - y_d^* \overline{d_R} \Phi^\dagger Q - y_u \overline{Q} \tilde{\Phi} u_R - y_u^* \overline{u_R} \tilde{\Phi}^\dagger Q$$

y a través del mecanismo de Higgs:

$$m_d = \frac{y_d v}{\sqrt{2}} \quad m_u = \frac{y_u v}{\sqrt{2}}$$

# Masas de los quarks (I)

Las masas de los quarks nos entregan información del acoplamiento con el higgs:

$$m_q = \frac{y_q v}{\sqrt{2}}$$

$$m_u \simeq 2.2 \text{ MeV} \quad m_d \simeq 4.7 \text{ MeV}$$

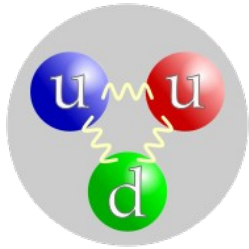
$$m_s \simeq 93 \text{ MeV} \quad m_c \simeq 1.27 \text{ GeV}$$

$$m_b \simeq 4.18 \text{ GeV} \quad m_t \simeq 176 \text{ GeV}$$

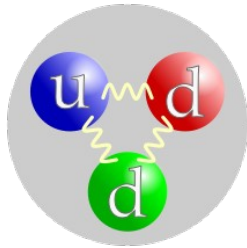
¡Los valores de las masa de los quarks es muy variado!

# Masas de los quarks (II)

Por otro lado, las masas del protón y del neutrón



$$m_p = 0.938 \text{ GeV} \gg 2m_u + m_d = 9.1 \text{ MeV}$$



$$m_n = 0.939 \text{ GeV} \gg m_u + 2m_d = 11.6 \text{ MeV}$$

Tienen masa mayor que la suma de la masa de sus quarks

# Masas de los quarks (III)

La contribución mayor a la masa de estos objetos viene por el vacío de QCD!

A bajas energías los quarks y gluones forman un condensado producido por el comportamiento de la fuerza fuerte



Gran parte de la masa de los átomos viene por el vacío de QCD

# Cromodinámica Cuántica (I)

Las interacciones entre los quarks se describen en el modelo de QCD.

Los quarks son fermiones que transforman bajo la simetría SU(3).

Cada quark está compuesto por 3 quarks con carga de color

$$\Psi_q = \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix}$$

# Cromodinámica Cuántica (II)

El lagrangiano de QCD corresponde a

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \overline{\Psi}_{q_i} (i(\gamma^\mu D_\mu)_{ij} - m \delta_{ij}) \Psi_{q_j} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$$

donde los bosones de gauge de QCD se llaman **gluones**:

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a + g_3 f^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c$$

$$D_\mu = \partial_\mu - i \frac{g_3}{2} \lambda^a \mathcal{A}_\mu^a$$



# Cromodinámica Cuántica (III)

El grupo  $SU(3)$  tiene 8 generadores y forman un algebra de Lie

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c,$$
$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = \frac{2}{3}\delta_{ab}\mathbb{1}_{3\times 3} + 2d_{abc}\lambda_c$$

Donde  $f$  son las constantes de estructura y  $d$  son los coeficientes de simetría

# Cromodinámica Cuántica (IV)

En la representación fundamental, aparecen las matrices de Gell-Mann:

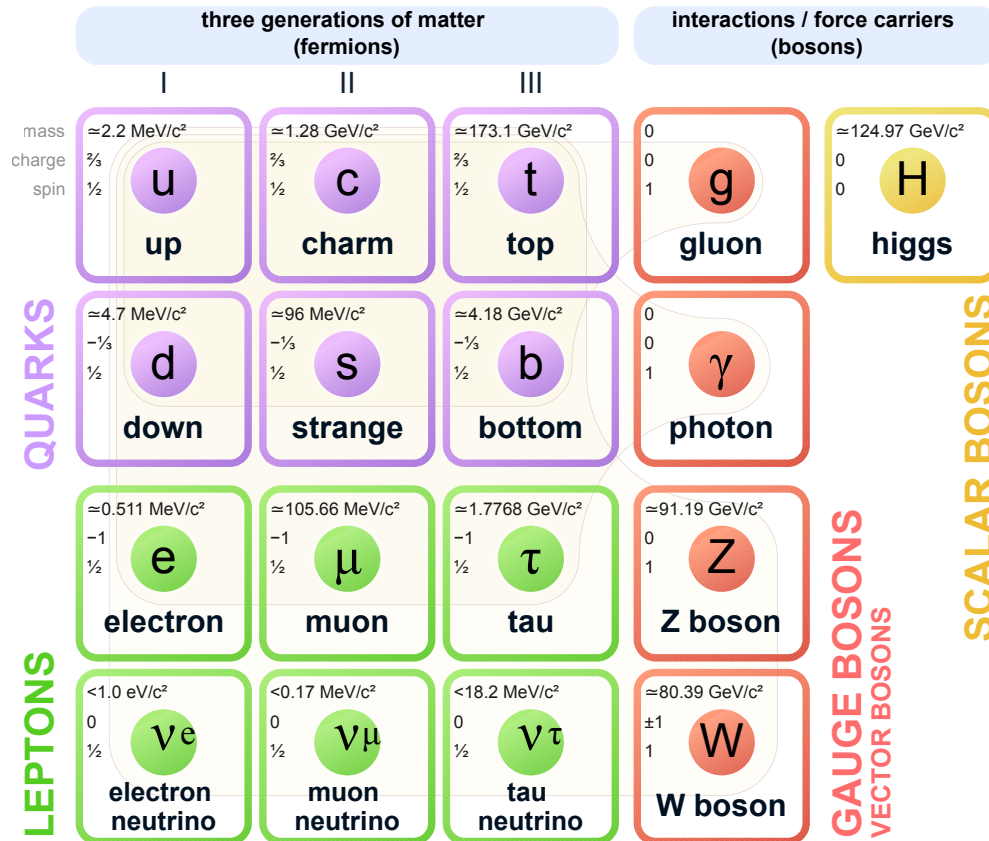
$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

# El Modelo Estándar

## Standard Model of Elementary Particles



DAFI-02255

# Introducción a la Física de Partículas

<https://robertolineros.com/teaching/fisica-de-particulas/>